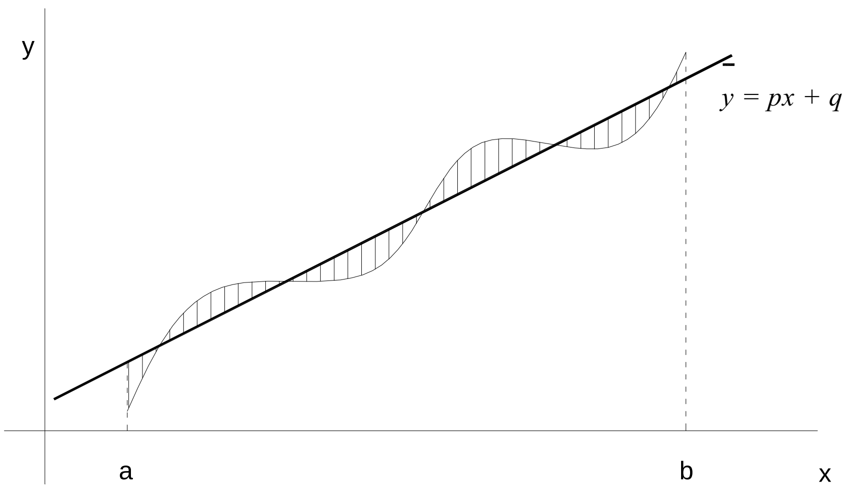
Politechnika Łódzka
Katedra Mechaniki Materiałów
Laboratorium Wytrzymałości Materiałów

INSTRUKCJA OPRACOWANIA WYNIKÓW BADAŃ PRZY POMOCY APROKSYACJI LINIWEJ

1. Wprowadzenie.
   Niech *x, y* są wielkościami fizycznymi, których zależność należy przeanalizować.
   Na podstawie rozwiązań teoretycznych wiemy, że zachowują się one liniowo, tak jak odkształcenie sprężyny – ciężar, odkształcenie – opór drutu tensometru, naprężenie – odkształcenie itp.
   W badaniach doświadczalnych rozpatrywane wielkości x, y wyznacza się zazwyczaj pośrednio przez pomiar innych wielkości. Na przykład dla wyznaczenia naprężeń stycznych *y* i posunięcia *x* mierzymy następujące wielkości pośrednie: siłę obciążającą, jej ramię, wymiary przekroju poprzecznego: przemieszczenie wspornika odczytujemy na czujniku zegarowym, długość wspornika i długość pręta mierzymy miarką.
   Najczęściej stnowisko badawcze jest tak skonstruowane, że zarówno dla *x* jak i *y* jedna z wielkości pośrednich może ulegać zmianie w sposób skokowy (w podanym przykładzie jest to siła obciążająca oraz przemieszczenie wspornika odczytane na czujniku). Wynika stąd, że wielkości *x, y* określające wszystkie możliwe stany fizyczne wyznaczone są tylko dla ich skończonej ilości / x_i, y_i /.
   Wielkości / x_i, y_i / rozszerzamy na wszystkie możliwe stany zastępując funkcję *f* / x_i, y_i / przez *f* / *x*, *y* /. Jej najlepsze przybliżenie liniowe można uzyskać z metody najmniejszych kwadratów (patrz 2). Występujące w tak postawionym problemie całki należy obliczyć metodą trapezów (patrz 3).Obliczenia można dokonać wg instrukcji dowolnymi metodami.
2. Aproksymacja liniowa funkcji ciągłej.
   Dana jest funkcja ciągła $y = \Phi(x)$



Najlepsze przybliżenie linowe /tzn. funkcję liniową $y = px + q$ / funkcji $\Phi(x)$ otrzymujemy z metody najmniejszych kwadratów żądając aby

/1/ $$\psi(p,q) = \int_a^b \left[\Phi(x) - (px - q)\right]^2 dx = \min$$

Oznacza to, że kwadrat pola zakreskowanego na wykresie osiąga najmniejszą wartość.
Warunkiem koniecznym spełnienia /1/ jest aby zachodziło:

/2/ $$\frac{\partial\psi(p,q)}{\partial p}=0 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial\psi(p,q)}{\partial q}=0$$

Otrzymujemy w ten sposób układ dwóch równań algebraicznych z dwiema niewiadomymi p i q.

Rozwiązaniem /2/ są wyrażenia:

/3/ $$p=\frac{12}{(b-a)^3}\left[\int_a^b x\Phi(x)dx-\frac{b+a}{2}\int_a^b\Phi(x)dx\right]$$

/4/ $$q=\frac{12}{(b-a)^3}\left[\frac{b^2+ab+a^2}{3}\int_a^b\Phi(x)dx-\frac{b+a}{2}\int_a^b x\Phi(x)dx\right]$$

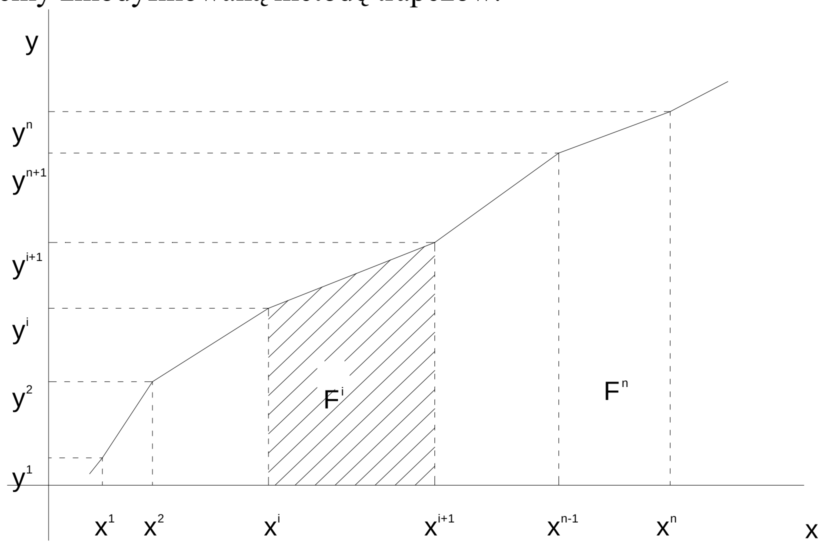
w przypadku szczególnym, gdy z założenia współczynnik q = 0, tzn. prosta $px+q$ przechodzi przez początek układu współrzędnych oraz a = 0 otrzymujemy

/3'/ $$p=\frac{3}{b^3}\int_a^b x\Phi(x)dx$$

3. Aproksymacja całki z funkcji ciągłej określonej przez wartość funkcji w *n* punktach.
Dany jest ciąg punktów /$x_0, x_1, \ldots x_n$/ i ciąg wartości funkcji /$y_1, y_2, \ldots y_n$/

Aby oszacować całkę $\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx$

Zastosujemy zmodyfikowaną metodę trapezów.



Zastępując pole ograniczone przez krzywą połową sum pól prostokątów otrzymujemy przybliżone wartości

$$\int_{x_0}^{x_n}\Omega(x)dx=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}F_i=\frac{1}{2}\left[y_1(x_1)(x_2-x_1)+\sum_{i=2}^{n-1}y_i(x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})+y_n(x_n)(x_n-x_{n-1})\right]$$

Chcąc oszacować wartości całek występujących w punkcie 2 (wzory 3, 4 i 3') należy dla całki

a/ $\int_a^b x\Phi(x)dx$ przyjąć $y(x)=x\Phi(x)$ oraz x_0 = a , x_n = b

b/ $\int_a^b \Phi(x)dx$ przyjąć $y(x)=\Phi(x)$