Kryterium wytężeniowe Mohra–Coulomba (materiał uzupełniający do wykładu z wytrzymałości materiałów II, *opr. Z. Więckowski*)

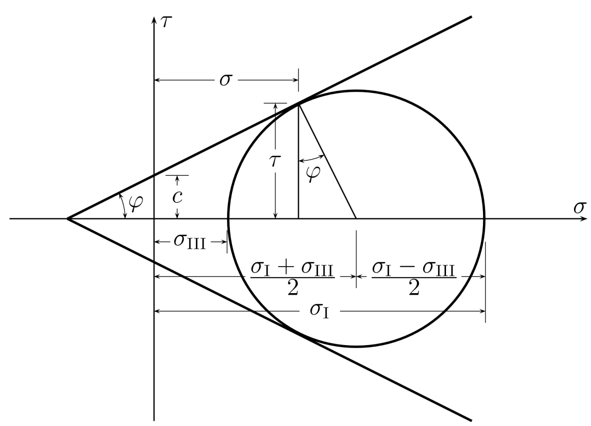
Kryterium Mohra–Coulomba jest stosowane w przypadku gruntów. Grunt może przenosić naprężenia normalne rozciągające o niewielkich wartościach, lub tylko naprężenia ściskające, jeśli jest pozbawiony kohezji (spójności). Ten drugi przypadek dotyczy np. suchego piasku lub żwiru, czyli takich materiałów, które są zbiorem ziaren, oddziałujących na siebie wyłącznie siłami docisku i tarcia.

Założeniem omawianej hipotezy wytrzymałościowej jest warunek – występujący w przypadku równowagi ciała – niewystępowania poślizgu na każdej (dowolnie zorientowanej) płaszczyźnie dzielącej myślowo materiał na dwie części, który ma następującą postać:

$$|\tau| \leq \sigma \operatorname{tg} \varphi + c, \tag{1}$$

gdzie τ oznacza naprężenie styczne działające na wspomnianej płaszczyźnie, σ – naprężenie normalne (ściskające) działające prostopadle do tej płaszczyzny, φ jest kątem tarcia wewnętrznego, charakteryzującym materiał, a c oznacza wartość spójności materiału (kohezji), czyli maksymalną wartość naprężenia stycznego, jaka może być osiągnięta w przypadku zerowych naprężeń normalnych do płaszczyzny. W równaniu (1) założono, że za dodatnie uważa się naprężenia normalne ściskające, co jest powszechnie stosowaną konwencją w mechanice gruntów. Jeśli $c = 0$, warunek (1) odpowiada prawu tarcie Coulomba, znanemu w mechanice ciała sztywnego.

W celu sformułowania warunku stanu granicznego w formie zależności od naprężeń głównych można zastosować konstrukcję koła Mohra (rys. 1). Na płaszczyźnie stanu naprężenia σ–τ narysowano dwie proste odpowiadające stanowi granicznemu – pojawieniu się poślizgu na rozpatrywanej płaszczyźnie kontaktu dwóch części materiału oraz okrąg Mohra odpowiadający temu stanowi, czyli znajdujący się między dwiema prostymi nachylonymi do poziomu pod kątem φ i stycznemu do tych prostych.



Rysunek 1: Interpretacja graficzna warunku (1) i stanu naprężenia w postaci wielkiego koła Mohra.

Na rysunku zaznaczone są wszystkie wielkości potrzebne do wyznaczenia szukanej relacji:

σ, τ – naprężenia normalne i styczne na powierzchni poślizgu,

σ_{I} – maksymalne naprężenie główne,

σ_{III} – minimalne naprężenie główne,

$(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})/2$ – współrzędna pozioma środka koła Mohra,

$(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})/2$ – promień koła Mohra,

φ, c – parametry materiałowe: kąt tarcia wewnętrznego i spójność materiału.

Prowadząc z punktu (σ, τ) odcinek prostopadły do osi σ można zauważyć, że jest on nachylony do promienia koła Mohra poprowadzonego do tego samego punktu pod kątem równym kątowi tarcia wewnętrznego φ. Można zatem wyrazić naprężenie normalne σ przez różnicę współrzędnej poziomej środka koła i długość rzutu poziomego zaznaczonego na rysunku promienia koła

$$\sigma = \frac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2} - \frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2} \sin\varphi, \tag{2}$$

a naprężenie styczne τ przez długość rzutu pionowego promienia

$$\tau = \frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2} \cos\varphi. \tag{3}$$

Po wykorzystaniu wyrażeń na naprężenia σ i τ w równaniu stanu granicznego na powierzchni poślizgu

$$|\tau| = \sigma \operatorname{tg}\varphi + c,$$

otrzymujemy następujący związek:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2} \cos\varphi = \frac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2} \operatorname{tg}\varphi - \frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2} \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + c,$$

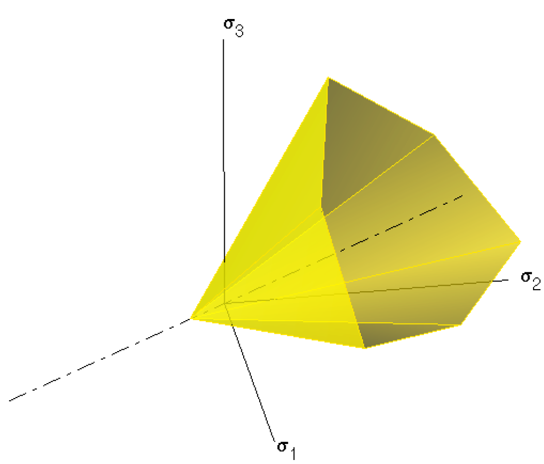
z którego – po pomnożeniu stronami przez $2\cos\varphi$ i zastosowaniu tożsamości $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ – wynika

$$\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}}) \sin\varphi + 2\,c\,\cos\varphi. \tag{4}$$

Z równania (4) wynika, że stan naprężenia dany przez naprężenia główne σ_1, σ_2, σ_3 spełnia poniższe sześć nierówności:

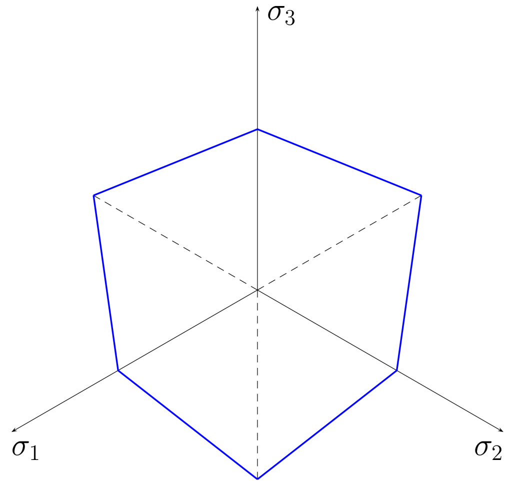
$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &\leq (\sigma_1 + \sigma_2) \sin\varphi + 2\,c\,\cos\varphi, \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &\leq (\sigma_2 + \sigma_3) \sin\varphi + 2\,c\,\cos\varphi, \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &\leq (\sigma_3 + \sigma_1) \sin\varphi + 2\,c\,\cos\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Z powyższych nierówności wynika, że powierzchnia graniczna jest powierzchnią ostrosłupa o podstawie sześciokątnej, przedstawioną na rys. 2. Oś tego ostrosłupa jest jednakowo nachylona do osi reprezentujących naprężenia główne w przestrzeni naprężeń głównych.



Rysunek 2: Powierzchnia graniczna odpowiadająca kryterium Mohra–Coulomba.

Na rys. 3 jest przedstawiony przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną prostopadłą do osi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, który jest sześciokątem o dwóch trójkach kątów o równej wielkości. Stosunek wielkości sąsiednich kątów zależny jest od wartości kąta tarcia wewnętrznego φ.



Rysunek 3: Przekrój powierzchni granicznej i płaszczyzny prostopadłej do osi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Należy zauważyć, że w przypadku zerowej wartości kąta tarcia wewnętrznego ze związku (4) wynika kryterium Tresci

$$\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} \leq 2\,c = \sigma_{\mathrm{pl}},$$

gdzie σ_{pl} oznacza granicę plastyczności na rozciąganie.