Belka na sprężystym podłożu Winklera (materiał uzupełniający do wykładu z wytrzymałości materiałów I, *opr. Z. Więckowski*)

Model Winklera jest najprostszym opisem zachowania sprężystego podłoża. Stosując ten model podłoża, zakłada się, że przemieszczenie dowolnego punktu powierzchni podłoża jest niezależne od przemieszczeń innych jej punktów oraz, że oddziaływanie podłoża w wybranym punkcie powierzchni jest proporcjonalne do przemieszczenia. Intensywność oddziaływania podłoża q_r, zebranego z szerokości podstawy belki, można zapisać wzorem

$$q_r = k\, y, \tag{1}$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności, zwanym sztywnością podłoża (lub współczynnikiem podłoża), a y przemieszczeniem punktu powierzchni podłoża. Uwzględniając w równaniu czwartego rzędu linii ugięcia belki oddziaływanie podłoża, otrzymujemy

$$(EJ\, y'')'' = q - q_r,$$

gdzie EJ jest sztywnością giętną belki, $y \equiv y(x))$ – funkcją ugięcia belki, q – intensywnością obciążenia belki rozłożonego w sposób ciągły. Po uwzględnieniu w powyższym równaniu związku (1) i założeniu, że sztywność giętna belki jest stała ($EJ = \mathrm{const}$), równanie linii ugięcia belki na podłożu Winklera przyjmuje postać:

$$y^{IV} + \frac{k}{EJ}\, y = \frac{q}{EJ}.$$

Stosując oznaczenie

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4\, EJ}},$$

powyższe równanie można zapisać w postaci:

$$y^{IV} + 4\alpha^4\, y = \frac{q}{EJ}. \tag{2}$$

Rozwiązanie równania (2) jest sumą całki ogólnej y_0 równania jednorodnego oraz całki szczególnej y_1 równania niejednorodnego. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$y_0 = e^{rx}, \tag{3}$$

gdzie r wyznacza się wstawiając (3) do równania jednorodnego

$$y_0^{IV} + 4\alpha^4\, y_0 = 0, \tag{4}$$

co daje równanie

$$r^4\, e^{rx} + 4\alpha^4\, e^{rx} = 0,$$

które jest spełnione dla dowolnej wartości zmiennej x, co oznacza, że r spełnia następujące równanie algebraiczne:

$$r^4 + 4\alpha^4 = 0.$$

Pierwiastki tego równania można wyznaczyć stosując następujące przekształcenia algebraiczne:

$$r^4 + 4\alpha^4 = r^4 + 4\alpha^2\, r^2 + 4\alpha^4 - 4\alpha^2\, r^2 = (r^2 + 2\alpha^2)^2 - 4\alpha^2\, r^2 = (r^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha\, r)(r^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha\, r),$$

co prowadzi do dwóch równań kwadratowych

$$r^2 - 2\alpha\, r + 2\alpha^2 = 0, \tag{5}$$

$$r^2 + 2\alpha\, r + 2\alpha^2 = 0. \tag{6}$$

Wyróżnik obu równań jest ujemny i równy $-4\alpha^2$, zatem oba mają rozwiązania zespolone. Pierwiastki równania (5) są równe

$$r_{1,2} = \alpha \pm \alpha\, i,$$

natomiast równania (6) —

$$r_{3,4} = -\alpha \pm \alpha\, i.$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (4) ma zatem postać

$$y_0(x) = e^{\alpha x}\,(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) + e^{-\alpha x}\,(C \sin \alpha x + D \cos \alpha x). \tag{7}$$

Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego ma — w przypadku stałego obciążenia ciągłego ($q = \mathrm{const}$) — postać

$$y_1 = \frac{q}{k},$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie powyższej zależności do równania.

Przykład. Wyznaczyć funkcję ugięcia belki nieskończonej (o nieograniczonej długości) obciążonej w punkcie $x = 0$ siłą skupioną P. Wyznaczyć siły przekrojowe w belce. Belka ma stałą sztywność EJ, a sztywność podłoża jest równa k.

Z uwagi na symetrię układu wystarczy rozważyć prawą część belki, $x \geq 0$. Na osi symetrii (w punkcie $x = 0$) kąt ugięcia jest równy zeru, ponadto jest znana wartość siły poprzecznej — jest ona równa połowie siły P działającej na osi symetrii układu. Oznacza to, że na lewym końcu belki warunki brzegowe mają postać:

$$y'(0) = 0 \tag{8}$$

$$-EJ\, y'''(0) = -P/2. \tag{9}$$

Dwie stałe całkowania w rozwiązaniu równania różniczkowego można wyeliminować, wykorzystując następujące warunki zapisane w przypadku prawego końca belki:

$$\lim_{x\to\infty} y(x) \leq M_1,$$
$$\lim_{x\to\infty} y'(x) \leq M_2,$$

gdzie M_1 i M_2 są stałymi o skończonych wartościach. Warunki te oznaczają, że ugięcia belki i kąty ugięcia nie mogą osiągać nieskończonych wartości na prawym końcu belki. Warunki te mogą być spełnione tylko w przypadku, gdy stałe całkowania A i B w równaniu (7) są równe zeru z uwagi na granicę funkcji $e^{\alpha x}$ przy x zmierzającym do nieskończoności.

Zatem funkcja ugięcia belki przyjmuje postać

$$y(x) = e^{-\alpha x}\,(C \sin \alpha x + D \cos \alpha x),$$

a jej pierwsza pochodna jest równa

$$y'(x) = -(C + D)\,\alpha e^{-\alpha x}\, \sin \alpha x + (C - D)\,\alpha e^{-\alpha x}\, \cos \alpha x.$$

Wykorzystanie warunku (8) prowadzi do równania

$$C = D,$$

co oznacza, że druga i trzecia pochodne funkcji ugięcia mają postaci

$$y''(x) = 2C\alpha^2\, e^{-\alpha x}\,(\sin \alpha x - \cos \alpha x),$$
$$y'''(x) = 4C\alpha^3\, e^{-\alpha x}\, \cos \alpha x.$$

Warunek (9) pozwala wyznaczyć stałą C:

$$-4\,EJ\,C\alpha^3 = -P/2 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{P}{8\,\alpha^3\,EJ}.$$

Ostatecznie funkcje ugięcia belki oraz sił przekrojowych można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{P}{8\,\alpha^3\,EJ}\,e^{-\alpha x}\,(\sin\alpha x + \cos\alpha x), \\ M(x) &= \frac{P}{4\,\alpha}\,e^{-\alpha x}\,(-\sin\alpha x + \cos\alpha x), \\ T(x) &= -\frac{P}{2}\,e^{-\alpha x}\,\cos\alpha x. \end{aligned}$$

Wykresy tych funkcji są przedstawione poniżej.