**Alternatywne wzory na główne kierunki bezwładności figury płaskiej** (materiał uzupełniający do wykładu z wytrzymałości materiałów I, *opr. Z. Więckowski*)

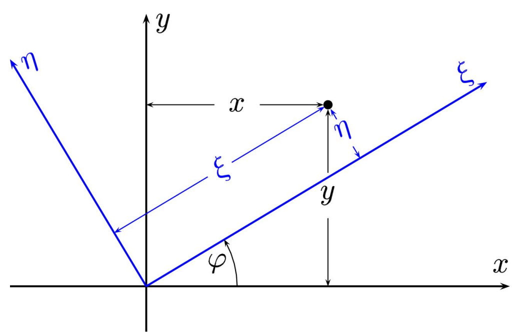
Najczęściej stosowanym wzorem przy wyznaczaniu głównych kierunków bezwładności figury płaskiej jest wzór na wartość tangensa podwojonego kąta nachylenia osi głównej do osi wyjściowego układu współrzędnych

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \tag{1}$$

Wzór ten wynika z przyrównania momentu dewiacyjnego $J_{\xi\eta}$ do zera

$$J_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi = 0.$$

Poniżej przedstawione są wzory na kierunki główne kątów nachylenia głównych osi bezwładności do osi $x$ układu współrzędnych $x$-$y$.




Wykorzystując poniższą tożsamość

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi_0}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0},$$

równanie (1) można przedstawić w postaci

$$\frac{2 \operatorname{tg} \varphi_0}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0} = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y},$$

a następnie

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0) \frac{J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Jest to równanie kwadratowe z niewiadomą $\operatorname{tg}\varphi_0$

$$\frac{J_{xy}}{J_x - J_y} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{J_{xy}}{J_x - J_y} = 0,$$

którego dwa rozwiązania są równe

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \left( \frac{J_{xy}}{J_x - J_y} \right)^2}}{2 \frac{J_{xy}}{J_x - J_y}}$$

Stosując przekształcenia przedstawione poniżej

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\left(\dfrac{J_{xy}}{J_x - J_y}\right)^2}}{2\,\dfrac{J_{xy}}{J_x - J_y}} = \frac{1}{J_{xy}}\left(\frac{J_x - Jy}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - Jy}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{J_{xy}}\,\frac{\left(\dfrac{J_x - J_y}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{J_x - J_y}{2}\right)^2 - J_{xy}^2}{\dfrac{J_x - J_y}{2} \mp \sqrt{\left(\dfrac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}} =$$

$$= \frac{-J_{xy}}{\dfrac{J_x - J_y}{2} - \dfrac{J_x + J_y}{2} + \dfrac{J_x + J_y}{2} \mp \sqrt{\left(\dfrac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}} = \frac{-J_{xy}}{-J_y + J_{1,2}},$$

otrzymujemy wyrażenia na wartości tangensa kątów nachylenia obu kierunków głównych

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-J_{xy}}{-J_y + J_1}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-J_{xy}}{-J_y + J_2}.$$

Wartości obu kątów można zinterpretować graficznie stosując konstrukcję koła Mohra.