

Wyznaczenie modułu wyboczenia (modułu zastępczego) w przypadku prostokątnego przekroju pręta

(materiał uzupełniający do wykładu z wytrzymałości materiałów, opr. Z. Więckowski)

Moduł wyboczenia (moduł zastępczy) E^* według teorii Engessera–Kármána oblicza się ze wzoru

$$E^* = \frac{E_t J_1 + E J_2}{J}, \quad (1)$$

gdzie:

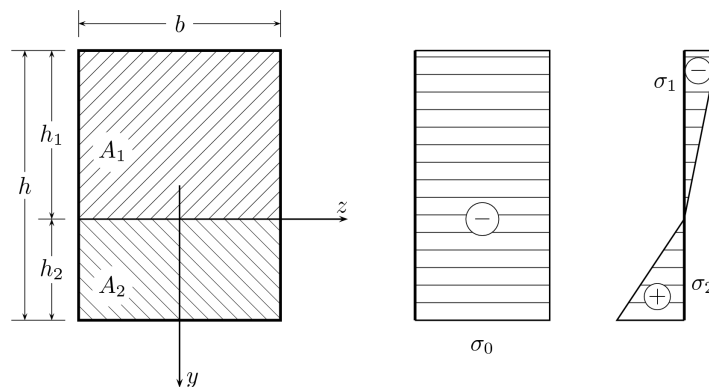
E – moduł sprężystości (Younga),

E_t – moduł styczny, $E_t = \partial\sigma/\partial\varepsilon$,

J – moment bezwładności przekroju pręta względem osi obojętnej przekroju pracującego w stanie liniowo sprężystym,

J_1 – moment bezwładności dociążanej części (A_1) przekroju pręta względem osi z (rysunek),

J_2 – moment bezwładności odciążanej części (A_2) przekroju pręta względem osi z .



Położenie osi obojętnej przekroju w przypadku wyboczenia niesprężystego ustala się, rozwiązując równanie

$$E_t S_1 + E S_2 = 0,$$

gdzie S_1 i S_2 są momentami statycznymi – odpowiednio – części dociążanej i odciążanej przekroju względem osi z , Równanie to można przedstawić następująco:

$$-E_t \frac{b h_1^2}{2} + E_t \frac{b h_2^2}{2} = 0,$$

gdzie h_1 jest wysokością części dociążanej, a h_2 – wysokością części odciążanej przekroju prostokątnego. Wynika z niego poniższy związek:

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{E}{E_t}}.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia $\alpha \equiv \sqrt{E/E_t}$ można zapisać następujące związki:

$$h_1 = \alpha h_2 = \alpha (h - h_1),$$

z których wynika, że

$$h_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} h, \quad h_2 = \frac{1}{1 + \alpha} h.$$

Wyrażenia na momenty bezwładności obu części: dociążanej i odciążanej mają postaci

$$J_1 = \frac{b h_1^3}{3} = \frac{b h^3}{3} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^3,$$
$$J_2 = \frac{b h_2^3}{3} = \frac{b h^3}{3} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^3.$$

Po podstawieniu otrzymanych powyżej wyrażeń do związku (1), moduł zastępczy można przedstawić w postaci:

$$E^* = \frac{E_t \frac{b h^3}{3} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^3 + E \frac{b h^3}{3} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^3}{\frac{b h^3}{12}}.$$

Wykonanie szeregu przekształceń i wykorzystanie relacji $\alpha \equiv \sqrt{E/E_t}$ pozwala przedstawić wyrażenie na moduł zastępczy w następującej postaci:

$$E^* = \frac{4 E E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}.$$