Metoda statyczna wyznaczania obciążenia granicznego (materiał uzupełniający do wykładu z wytrzymałości materiałów I, *opr. Z. Więckowski*)

Rozwiązanie zagadnienia nośności granicznej spełnia następujące warunki:

1. stan uplastycznienia występuje w dostatecznej liczbie prętów (przekrojów) — układ staje się mechanizmem o jednym stopniu swobody,

2. stan przemieszczenia jest kinematycznie dopuszczalny:

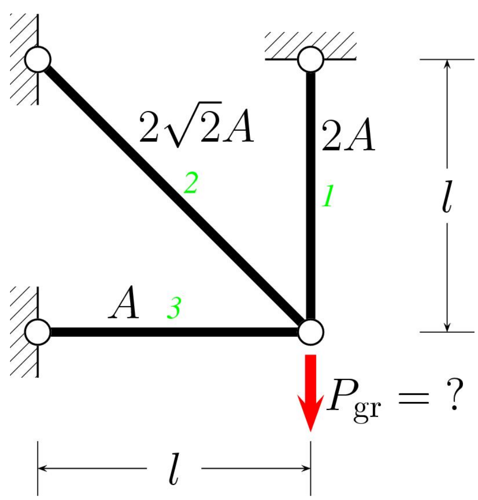
   - stan przemieszczenia jest zgodny z więzami,
   - praca obciążenia zewnętrznego jest dodatnia,

3. stan naprężenia jest statycznie dopuszczalny (spełnione są warunki równowagi) i plastycznie dopuszczalny (spełniony jest warunek $|\sigma| \leq \sigma_{\mathrm{pl}}$).

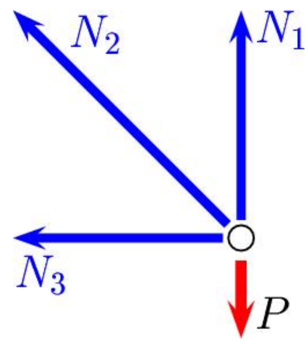
Metoda statyczna polega na wyznaczeniu wartości obciążenia (P^i_{st}, $i = 1, 2, \ldots, n$, gdzie n jest liczbą schematów zniszczenia) odpowiadających schematom zniszczenia spełniającym warunki nr 1 i 3, zwanych statycznie dopuszczalnymi schematami zniszczenia, i określeniu wartości obciążenia granicznego jako maksymalnej wartości spośród wyznaczonych dla poszczególnych schematów, $P_{\mathrm{gr}} = \sup\limits_i (P^i_{\mathrm{st}})$. Metoda ta wynika z poniższego twierdzenia o dolnym ograniczeniu obciążenia granicznego:
Twierdzenie: Obciążenie graniczne układu jest większe lub co najwyżej równe obciążeniu odpowiadającemu statycznie dopuszczalnemu schematowi zniszczenia układu:

$$P_{\mathrm{gr}} \geq P_{\mathrm{st}}.$$

Przykład zastosowania metody statycznej: Wyznaczyć obciążenie graniczne w przypadku układu prętów przedstawionego na rysunku. Wartość granicy plastyczności na rozciąganie i ściskanie jest równa σ_{pl}.



Statycznie dopuszczalny schemat zniszczenia powinien spełniać warunki 1. i 3. spośród warunków przedstawionych powyżej. Ponieważ układ w stanie granicznym jest mechanizmem o jednym stopniu swobody, dwa spośród trzech prętów ulegają uplastycznieniu. Istnieją trzy kombinacje wyboru pary uplastycznionych prętów spośród trzech. Zatem konstruując statycznie dopuszczalne schematy zniszczenia, należy rozważyć uplastycznienie dwóch prętów. Siły w prętach powinny spełniać warunki



równowagi. Uwalniając przegub kratownicy od więzów, otrzymujemy płaski układ sił zbieżnych przedstawiony na rysunku. Warunki równowagi mają postać dwóch równań:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\,N_2 - N_3 = 0, \tag{1}$$

$$N_1 + N_2\,\frac{1}{\sqrt{2}} - P = 0, \tag{2}$$

gdzie (1) wynika z rzutowania sił na kierunek poziomy, natomiast (2) — na kierunek pionowy. Ponadto siły w prętach powinny spełniać warunek plastyczności $|\sigma| \leq \sigma_{\mathrm{pl}}$ lub $|N| \leq A\,\sigma_{\mathrm{pl}}$, co oznacza, że w każdym z uplastycznionych prętów należy rozważyć wartość siły równą

$$N = \pm A\,\sigma_{\mathrm{pl}}.$$

Ponieważ każdy schemat zniszczenia zawiera dwa uplastycznione pręty, a siła w pręcie może mieć dwie wartości, liczba schematów zniszczenia w przypadku każdej pary uplastycznionych prętów jest równa 4. Liczba możliwych par uplastycznionych prętów jest równa 3. Stąd liczba wszystkich statycznie dopuszczalnych schematów zniszczenia jest równa 12. Wszystkie te schematy są zestawione w poniższej tabeli.

schematy zniszczenia

nr	N_1	N_2	N_3	uplastycznione pręty
1	$2A\sigma_{\mathrm{pl}}$	$2\sqrt{2}A\sigma_{\mathrm{pl}}$	?	1, 2
2	$2A\sigma_{\mathrm{pl}}$	$-2\sqrt{2}A\sigma_{\mathrm{pl}}$	?	1, 2
3	$-2A\sigma_{\mathrm{pl}}$	$2\sqrt{2}A\sigma_{\mathrm{pl}}$	?	1, 2
4	$-2A\sigma_{\mathrm{pl}}$	$-2\sqrt{2}A\sigma_{\mathrm{pl}}$	?	1, 2
5	$2A\sigma_{\mathrm{pl}}$	?	$A\sigma_{\mathrm{pl}}$	1, 3
6	$2A\sigma_{\mathrm{pl}}$	?	$-A\sigma_{\mathrm{pl}}$	1, 3
7	$-2A\sigma_{\mathrm{pl}}$	?	$A\sigma_{\mathrm{pl}}$	1, 3
8	$-2A\sigma_{\mathrm{pl}}$	?	$-A\sigma_{\mathrm{pl}}$	1, 3
9	?	$2\sqrt{2}A\sigma_{\mathrm{pl}}$	$A\sigma_{\mathrm{pl}}$	2, 3
10	?	$2\sqrt{2}A\sigma_{\mathrm{pl}}$	$-A\sigma_{\mathrm{pl}}$	2, 3
11	?	$-2\sqrt{2}A\sigma_{\mathrm{pl}}$	$A\sigma_{\mathrm{pl}}$	2, 3
12	?	$-2\sqrt{2}A\sigma_{\mathrm{pl}}$	$-A\sigma_{\mathrm{pl}}$	2, 3

Poniżej przedstawione są obliczenia w przypadku trzech wybranych schematów zniszczenia: 1., 5. i 6.

Schemat nr 1: $N_1 = 2A\sigma_{\text{pl}}$, $N_2 = 2\sqrt{2}A\sigma_{\text{pl}}$.
Z równania równowagi (1) obliczamy wartość siły N_3

$$N_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, N_2 = -2\, A\, \sigma_{\text{pl}}$$

i odpowiadające jej naprężenie w przekroju pręta

$$\sigma_3 = \frac{-2\, A\, \sigma_{\text{pl}}}{A} = -2\, \sigma_{\text{pl}} \quad \Rightarrow \quad |\sigma_3| = 2\, \sigma_{\text{pl}} > \sigma_{\text{pl}}.$$

Ponieważ otrzymana wartość naprężenia nie spełnia warunku plastyczności, schemat ten nie jest plastycznie dopuszczalny i odpowiadająca mu wartość obciążenia nie jest wartością graniczną.

Schemat 5: $N_1 = 2A\sigma_{\text{pl}}$, $N_3 = A\sigma_{\text{pl}}$.
Z równania równowagi (1) obliczamy wartość siły N_2

$$N_2 = -\sqrt{2}\, N_3 = -\sqrt{2}\, A\, \sigma_{\text{pl}}$$

i odpowiadające jej naprężenie w przekroju pręta

$$\sigma_2 = \frac{-\sqrt{2}\, A\, \sigma_{\text{pl}}}{2\sqrt{2}A} = -\frac{\sigma_{\text{pl}}}{2} \quad \Rightarrow \quad |\sigma_2| = \frac{\sigma_{\text{pl}}}{2} < \sigma_{\text{pl}}$$

Ponieważ wartość naprężenia spełnia warunek plastyczności, z równania (2) obliczamy wartość obciążenia odpowiadającą rozpatrywanemu schematowi zniszczenia, oznaczając ją P_5,

$$P_5 = 2\, A\, \sigma_{\text{pl}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, (-\sqrt{2}\, A\, \sigma_{\text{pl}}) = A\, \sigma_{\text{pl}}.$$

Schemat 6: $N_1 = 2A\sigma_{\text{pl}}$, $N_3 = -A\sigma_{\text{pl}}$.
Z równania równowagi (1) obliczamy wartość siły N_2

$$N_2 = -\sqrt{2}\, N_3 = \sqrt{2}\, A\, \sigma_{\text{pl}}$$

i odpowiadające jej naprężenie w przekroju pręta

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}\, A\, \sigma_{\text{pl}}}{2\sqrt{2}A} = \frac{\sigma_{\text{pl}}}{2} \quad \Rightarrow \quad |\sigma_2| = \frac{\sigma_{\text{pl}}}{2} < \sigma_{\text{pl}}.$$

Ponieważ wartość naprężenia spełnia warunek plastyczności, z równania (2) obliczamy wartość obciążenia odpowiadającą rozpatrywanemu schematowi zniszczenia, oznaczając ją P_6,

$$P_6 = 2\, A\, \sigma_{\text{pl}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \sqrt{2}\, A\, \sigma_{\text{pl}} = 3\, A\, \sigma_{\text{pl}}.$$

Rozważenie pozostałych schematów zniszczenia pozostawia się Czytelnikowi. Po rozpatrzeniu wszystkich statycznie dopuszczalnych schematów zniszczenia układu obliczamy graniczną wartość obciążenia:

$$P_{\text{gr}} = \max(P_1, \ldots, P_{12}) = P_6 = 3\, A\, \sigma_{\text{pl}}.$$