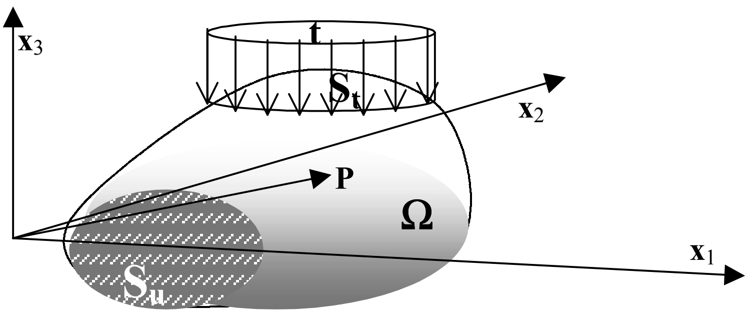
Wykład 1
Zagadnienie brzegowe liniowej teorii sprężystości.
Metody rozwiązywania, metody wytrzymałości materiałów.

Zestawienie wzorów i określeń.

Układ współrzędnych Kartezjański, prostokątny. Osie x y z oznaczono odpowiednio przez x_1, x_2, x_3.



Rozpatrujemy obszar Ω z brzegiem S podzielonym na dwie rozłączne części S_u i S_t.
Obszar ten wypełniony jest ciągłym ośrodkiem materialnym M.
Dowolny punkt P w obszarze Ω ma współrzędne $\mathbf{x}^P$. Wektor położenia punktu P zapisywany jest również przy użyciu następującej konwencji:

$$\vec{x}^P = \left(x_1^P, x_2^P, x_3^P\right)$$

lub w zapisie indeksowym: x_i^P, gdzie i=1, 2, 3.

Na części brzegu S_t. zadany jest wektor naprężenia $\mathbf{t}^0$ o składowych t^0_i (to znaczy: t^0_1,. t^0_2, t^0_3). Pod działaniem tego obciążenia punkty ciała M zmienia swoje położenie w przestrzeni. Obszar Ω zmienia kształt. Nowe położenia P' punktów ciała M nazywamy jego konfiguracją odkształconą. Dowolny punkt P zajmuje w konfiguracji odkształconej nowe położenie $\mathbf{x}^{P'}$:

$$\vec{x}^{P'} = \left(x_1^{P'}, x_2^{P'}, x_3^{P'}\right)$$

Różnica wektorów tych dwóch położeń punktu P opisana jest przez wektor przemieszczenia $\mathbf{u}^P(\mathbf{x}^P)$:

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}^P)=\mathbf{x}^{P'}-\mathbf{x}^P$$

W zdeformowanym obszarze Ω zdefiniowane jest tym samym pole wektora przemieszczenia $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ o składowych skalarnych ($u_1(\mathbf{x})$, $u_2(\mathbf{x})$, $u_3(\mathbf{x})$). Pole to powinno być "zgodne" z danym przemieszczeniem $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ zadanym na części S_u brzegu Ω. To znaczy, że:

$$\text{dla } \mathbf{x}\subset S_u \quad \mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \quad \text{gdzie } \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \text{ jest dane}$$

Odkształcenie nieskończenie małego elementu dΩ opisane jest polem tensora małego odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\vec{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\vec{x})}{\partial x_i}\right) \qquad \text{lub zapisując skrótowo:} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial u_{i,j} + \partial u_{j,i}\right)$$

Składowe tensora małego odkształcenia reprezentowane są przez macierz pól skalarnych:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Myślowo wyodrębniony z obszaru Ω element $d\Omega$ oddziałuje z resztą obszaru, poprzez element powierzchni dS, za pośrednictwem wektora naprężeń **t**. Składowe wektora naprężeń **t** zależą nie tylko od punktu M w położeniu odkształconym P' ale także od orientacji przestrzennej element powierzchni dS poprowadzonej przez P'. Ta orientacja zadana jest za pośrednictwem **n** - jednostkowego wektora normalnego do dS. Wektor ten ma współrzędne następujące:

$$\mathbf{n}=\{\cos(\mathbf{n},Ox_1),\ \cos(\mathbf{n},Ox_2),\ \cos(\mathbf{n},Ox_3)\}$$

Wielkością charakteryzującą stan naprężenia w punkcie ciała M w jego położeniu P' jest tensor naprężenia $\boldsymbol{\tau}$. Jest on związany z wektorem naprężenia w punkcie materialnym M zależnością:

$$\sum_{j=1}^{3} \tau_{ij}(\vec{x}) n_j(\vec{x}) = t_i(\vec{x},\vec{n})$$

Interpretacja i umowa o znakach dla macierzy składowych tensora naprężenia znana jest z dotychczasowego kursu wytrzymałości materiałów.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Warunki równowagi zapisane dla element $d\Omega$ prowadzą do sześciu równań (**b** jest wektorem sił masowych):

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \qquad \text{(symetria tensora naprężenia)}$$

$$\text{dla } i=1,2,3: \qquad \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} + b_i = 0 \qquad \text{lub skrótowo: } \sum_{j=1}^{3} \tau_{ij,j} + b_i = 0$$

Związek pomiędzy tensorem odkształcenia a tensorem naprężenia jest właściwością materiału i powinien być określony doświadczalnie. Liniowa teoria sprężystości zakłada, że związek ten opisany jest uogólnionym prawem Hooke'a. Zapis tego prawa konstytutywnego, dla przypadku materiału izotropowego podany jest poniżej:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{ij} + \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\tau_{kk}$$

pomocniczy symbol $\boldsymbol{\delta}$ określa się nastepująco: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & dla \quad i = j \\ 0 & dla \quad i \neq j \end{cases}$

Zależność $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\tau})$ można łatwo "odwrócić", obliczając $\boldsymbol{\tau}$ w funkcji $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}\right)$$

Ramka nr 1 zawiera sformulowanie zadania liniowej teorii sprezystości:

Ramka 1. Sformułowanie liniowego problemu teorii sprężystości:

Znaleźć wektorowe pole przemieszczeń $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, oraz tensorowe pole naprężeń $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, takie że:

$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ na części brzegu S_u

naprężenia $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ spełniają naprężeniowe warunki brzegowe (równowaga elementu w sąsiedztwie brzegu S_t):

$$\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij}(\vec{u})n_j = t_i^0 \qquad \text{na części brzegu } S_t$$

oraz warunki równowagi w całym obszarze Ω:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \qquad \sum_{j=1}^{3}\tau_{ij,j} + b_i = 0$$

Ponadto spełnione jest prawo Hooke'a, które wiąże tensor naprężenia z wektorem przemieszczenia za pośrednictwem tensora małych odkształceń:

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}(\vec{u}) + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(\vec{u})\right) \text{ gdzie } \varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\partial u_{i,j} + \partial u_{j,i}\right)$$

Prawo Hooke'a może być równie dobrze zadane wzorem:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{ij} + \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\tau_{kk}$$

(we wszystkich równaniach i,j,k=1,2,3)

Dwa sformułowania pochodne: przemieszczeniowe i naprężeniowe - pozwalają zredukować liczbę niewiadomych pól skalarnych.

Zapis $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ w formułach w ramce nr 2. oznacza, że naprężenia zostały wyrażone przez przemieszczenia **u.** Podobnie zapis $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ oznacza, że naprężenia zostały wyrażone przez przemieszczenia **u** i w powyższym sformułowaniu są tylko trzy niewiadome funkcje skalarne: $u_1(\mathbf{x})$, $u_2(\mathbf{x})$, $u_3(\mathbf{x})$, nie zaś 9, jak poprzednio.

Ramka 2. Przemieszczeniowe sformułowanie liniowego problemu teorii sprężystości:

Znaleźć wektorowe pole przemieszczeń $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, takie że:

$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ na części brzegu S_u

i takie, że składowe tensora naprężenia obliczone za pośrednictwem związku konstytutywnego:

$$\tau_{ij}(\vec{u})=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}(\vec{u})+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(\vec{u})\right) \text{ gdzie } \varepsilon_{ij}(\vec{u})=\frac{1}{2}\left(\partial u_{i,j}+\partial u_{j,i}\right)$$

spełniają warunki równowagi:

w całym obszarze Ω: $\tau_{ij}=\tau_{ji}$ $\quad \sum_{j=1}^{3}\tau_{ij,j}+b_i=0$

oraz naprężeniowe warunki brzegowe (równowaga elementu w sąsiedztwie brzegu St):

$\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij}(\vec{u})n_j=t_i^0$ na części brzegu S_t

Poniżej przedstawiono przykład sformułowania przemieszczeniowego. Jest to układ równań Naviera. Jego wyprowadzenie wymaga wykonania następujących operacji:

- $\mathbf{u} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rightarrow$ prawo Hooke'a$\rightarrow \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$
- Podstawienie $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ do równań równowagi.

Otrzyma się w ten sposób równania równowagi wyrażone przez przemieszczenia:

$$\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij,j}(\vec{u})+b_i=0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij,j}(\vec{u})+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk,j}(\vec{u})\right)+b_i=0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}\left(u_{i,jj}+u_{j,ij}\right)+\frac{E}{1+\nu}\frac{\nu}{1-2\nu}\sum_{k=1}^{3}u_{k,ki}+b_i=0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}u_{i,jj}+\left(\frac{E}{1+\nu}\frac{\nu}{1-2\nu}+\frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{3}u_{k,ki}+b_i=0$$

(zauważmy, że nie ma to znaczenia czy wskaźnik sumowania od 1 do 3 nazywa się j czy k)

$$\sum_{j=1}^{3}u_{i,jj}+\frac{1}{(1-2\nu)}\sum_{k=1}^{3}u_{k,ki}+\frac{2(1+\nu)}{E}b_i=0$$

Jest to układ trzech równań różniczkowych (kolejno dla i=1, 2, 3) z drugimi pochodnymi cząstkowymi, określony w obszarze Ω i z warunkami brzegowymi na S_u. Sformułowanie to wygodnie jest stosować jeśli warunki brzegowe zadane są jedynie na S_u. Ewentualne warunki brzegowe naprężeniowe powinny być wyrażone w przemieszczeniach w następujący sposób:

$$\frac{E}{1+\nu}\left(\left(u_{i,j}+u_{i,j}\right)n_j+\frac{\nu}{1-2\nu}\sum_{k=1}^{3}u_{k,k}n_i\right)=p_i$$

Problem liniowej teorii sprężystości w ujęciu przemieszczeniowym można teraz sformułować tak:

Ramka 2.1. Przemieszczeniowe sformułowanie liniowego problemu teorii sprężystości - równania Naviera:

Znaleźć wektorowe pole przemieszczeń **u**(**x**), takie że:

$u_i = u^0_i$ na części brzegu S_u

oraz $\frac{E}{1+\nu}\left(\left(u_{i,j}+u_{i,j}\right)n_j+\frac{\nu}{1-2\nu}\sum_{k=1}^{3}u_{k,k}n_i\right)=p_i$ na części brzegu S_t

i takie, że składowe wektora przemieszczenia spełniają układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych (równania Naviera):

$$\sum_{j=1}^{3}u_{i,jj}+\frac{1}{(1-2\nu)}\sum_{k=1}^{3}u_{k,ki}+\frac{2(1+\nu)}{E}b_i=0$$

Składowe tensora naprężenia można obliczyć za pośrednictwem związku konstytutywnego:

$$\tau_{ij}(\vec{u})=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}(\vec{u})+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(\vec{u})\right)$$

gdzie $\varepsilon_{ij}(\vec{u})=\frac{1}{2}\left(\partial u_{i,j}+\partial u_{j,i}\right)$ zaś **u** jest rozwiązaniem równań różniczkowych Naviera.

(Oczywiście naprężenia takie automatycznie spełniają równania równowagi oraz naprężeniowe warunki brzegowe.)

Aby uzyskać sformułowanie naprężeniowe liniowego problemu teorii sprężystości, należy wyeliminować przemieszczenia ze sformułowania wyjściowego. W tym celu należy zróżniczkować dwukrotnie ε_{11} względem x_2 zaś ε_{22} względem x_1 następnie dodać dodać stronami oba rownania:

$$\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=u_{1,122}+u_{2,211}=\gamma_{12,12}$$

Podobnie można uzyskać dwa kolejne wzory:

$$\varepsilon_{11,33}+\varepsilon_{33,11}=\gamma_{13,13}$$

$$\varepsilon_{22,33}+\varepsilon_{33,22}=\gamma_{23,23}$$

Trzy następne otrzymuje sie przez wykonanie podobnych przekształceń na równaniach definiujących $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\gamma_{12,3}=u_{1,23}+u_{2,13}$$

$$\gamma_{13,2}=u_{1,32}+u_{3,12}$$

$$\gamma_{23,1}=u_{2,31}+u_{3,21}$$

$$\gamma_{12,3}+\gamma_{13,2}-\gamma_{23,1}=u_{1,23}+u_{1,32}$$

$$\gamma_{12,31}+\gamma_{13,21}-\gamma_{23,11}=u_{1,123}+u_{1,132}=2\varepsilon_{11,23}$$

podobnie otrzymuje się dwa poniższe wzory:

$$\gamma_{21,32} + \gamma_{23,12} - \gamma_{13,22} = 2\varepsilon_{22,13}$$

$$\gamma_{32,13} + \gamma_{31,23} - \gamma_{12,33} = 2\varepsilon_{33,12}$$

Równania powyższe nazywane są warunkami nierozdzielności odkształceń. Ich spełnienie daje gwarancje znalezienia ciągłego i różnowartościowego pola przemieszczeń **u**, takiego, że:

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Ramka nr 3. Naprężeniowe sformułowanie liniowego problemu teorii sprężystości:

Znaleźć tensorowe pole naprężeń $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, takie że:
spełnione są warunki równowagi:

w całym obszarze Ω: $\quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \qquad \sum_{j=1}^{3} \tau_{ij,j} + b_i = 0$

oraz naprężeniowe warunki brzegowe

$\sum_{j=1}^{3} \tau_{ij}(\vec{u}) n_j = t_i^0$ na części brzegu S_t

Odkształcenia wyznaczone dla tych naprężeń za pośrednictwem prawa Hooke'a:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1+\nu}{E}\tau_{ij} + \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\tau_{kk}$$

powinny spełniać równania nierozdzielności w całym obszarze Ω:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \gamma_{12,12}$$

$$\varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11} = \gamma_{13,13}$$

$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} = \gamma_{23,23}$$

$$\gamma_{12,31} + \gamma_{13,21} - \gamma_{23,11} = 2\varepsilon_{11,23}$$

$$\gamma_{21,32} + \gamma_{23,12} - \gamma_{13,22} = 2\varepsilon_{22,13}$$

$$\gamma_{32,13} + \gamma_{31,23} - \gamma_{12,33} = 2\varepsilon_{33,12}$$

Zauważmy, że ponieważ $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\tau})$, w równaniach nierozdzielności w ramce nr 3. występują tylko pola naprężeń spełniające równania równowagi i warunki naprężeniowe na części brzegu S_t (takie pola naprężeń nazywamy statycznie dopuszczalnymi).

Cwiczenie: Przedstawić wszystkie równania występujące w wykładzie tak, aby występowały w nich jawnie wielkości σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{zy}, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{zy}, u, v, w. Porównać otrzymany zapis z tym jaki jest podany w rozdziale 17 (Zadania i podstawowe równania teorii sprężystości) podręcznika "Wytrzymałość Materiałów" (A. Jakubowicz, Z. Orłoś).