

Wykład 2 (4 godziny)

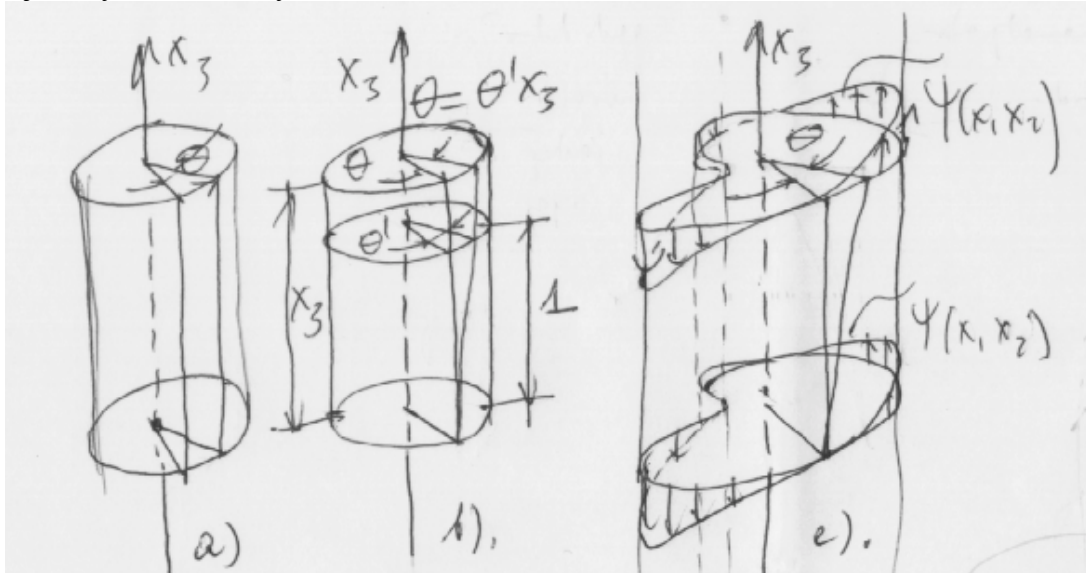
Skrećanie nieskrepowane prętów o przekroju dowolnym.

Hipoteza kinematyczna:

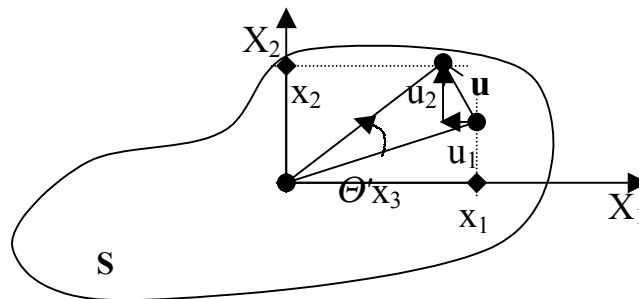
załóżmy, że przemieszczenia są następującej postaci:

$$u_1 = -\theta' x_2 x_3 \quad u_2 = \theta' x_1 x_3 \quad u_3 = \theta' \psi(x_1, x_2)$$

Ilustruje to rysunek 2.1 i rysunek 2.2:



Rys. 2.1. a) obrót sztywny, b) skrećanie jednostkowe i kąt wzajemnego obrotu dwu przekrojów, c) superpozycja skrećania płaskiego jak w p. b) oraz deplanacji przekroju.



Rys. 2.2. wektor przemieszczenia i jego składowe na osiach x_1 i x_2 .

Kąt obrotu jest mały (na rysunku jest "powiększony"). Składowe przemieszczenia w płaszczyźnie przekroju liczymy tak, jak to było pokazane na wykładzie (i ćwiczeniach) z kinematyki przy analizie małych obrotów tarczy sztywnej.

Obliczmy odkształcenia:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= 0 & \epsilon_{22} &= 0 & \epsilon_{33} &= 0 \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \theta' (x_2 - x_2) = 0 & \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \theta' (\psi_{,1} - x_2) & \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} \theta' (\psi_{,2} + x_1) \end{aligned}$$

Pole naprężeń $\tau(\mathbf{x})$ jest następujące:

$$\sigma_{(i)i} = 0 \quad \tau_{12} = 0$$

$$\tau_{13} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \Theta'(\psi_{,1} - x_2) \quad \tau_{23} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \Theta'(\psi_{,2} + x_1)$$

Sprawdzamy, czy τ spełnia równania równowagi:

$$\tau_{13,3} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \Theta''(\psi_{,1} - x_2)_{,3} = 0$$

$$\tau_{23,3} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \Theta''(\psi_{,2} + x_1)_{,3} = 0$$

$$\tau_{13,1} + \tau_{23,2} = 0 \Rightarrow \psi_{,11} + \psi_{,22} = 0 \quad (1)$$

Aby trzeci warunek równowagi był spełniony, funkcja deplanacji musi być harmoniczna. Sprawdzamy, czy τ spełnia warunki brzegowe na pobocznicę pręta (wystarczy sprawdzić trzecie równanie):

$$\tau_{13}n_1 + \tau_{23}n_2 = 0 \Rightarrow (\psi_{,1} - x_2)n_2 + (\psi_{,2} + x_1)n_2 = 0$$

niestety, równanie na brzegu jest trudne do spełnienia jak widać... Jeśli wprowadzimy pomocniczą funkcję $\varphi(x_1, x_2)$, tzw. funkcję naprężeń, otrzymamy łatwiejsze zagadnienie brzegowe. Wykorzystajmy prostą reprezentację stanu naprężenia (o jedynie dwu niezerowych składowych) przy pomocy funkcji Prandtla $\varphi(x_1, x_2)$:

$$\tau_{13} = \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad \tau_{23} = -\frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

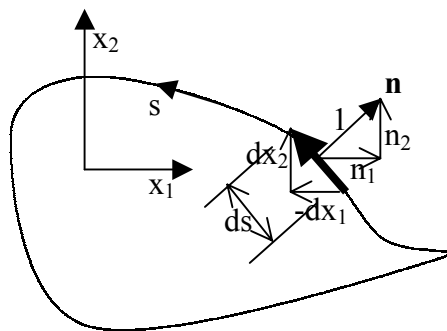
reprezentacja ta jest tak skonstruowana, aby równanie równowagi było tożsamościowo spełnione:

$$\tau_{13,1} + \tau_{23,2} = 0 \Rightarrow \varphi_{,21} - \varphi_{,12} = 0$$

Warunek brzegowy jest teraz wyjątkowo łatwy do spełnienia:

$$\frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} n_1 + \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} n_2 = 0 \quad \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} = 0 \quad \frac{d\varphi}{ds} = 0$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \text{const} \quad \text{na brzegu.}$$



Rys. 2.2. Ilustracja związków pomiędzy wektorem jednostkowym normalnym do brzegu \mathbf{n} i jego cosinusami kierunkowymi a elementem brzegu ds i jego rzutami dx_1 i dx_2 .

Pozostaje ustalić związek pomiędzy $\varphi(x_1, x_2)$ a funkcją deplanacji (obie reprezentują odpowiednie naprężenia, można je więc porównać):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \Theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_2 \right) \quad - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \Theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_1 \right) \quad (2)$$

Otrzymaliśmy zależności pomiędzy pochodnymi cząstkowymi obu funkcji. Równania powyższe pozwalają wyznaczyć równanie różniczkowe, jakie powinna spełniać funkcja reprezentacji Prandtla (jak dotąd znamy warunek brzegowy dla φ , nie znamy zaś równania różniczkowego dla tej funkcji). Wystarczy zróżniczkować (2)₁ po x_2 , (2)₂ po x_1 , dodać stronami i wykorzystać (1):

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} = -2G\Theta'$$

Na powierzchni przekroju poprzecznego nie uda nam się zapewnić zgodności rozkładu naprężeń z dowolnym rzeczywistym (hipoteza kinematyczna jest zbyt ograniczająca). Możemy jednak spełnić warunki brzegowe całkowo, dla wypadkowych sił i momentów.

Suma rzutów na osie x_1 i x_2 znika:

$$\int_S \tau_{31} dx dy = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \int_{\partial S} \varphi n_2 ds = 0 \quad \int_S \tau_{32} dx dy = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \int_{\partial S} \varphi n_1 ds = 0$$

Moment wokół osi x_3 wynosi (całkowanie przez części):

$$M = \int_S (-\tau_{31} x_2 + \tau_{32} x_1) dx dy = \int_S \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1 \right) dx dy = - \int_{\partial S} \varphi (-x_2 n_2 + x_1 n_1) ds + 2 \int_S \varphi dx_1 dx_2$$

$$M = 2 \int_S \varphi dx_1 dx_2$$

Przedstawione sformułowanie jest podstawą dla wyprowadzenia wzorów szczegółowych opisujących skrećanie prętów o specyficznych przekrojach: eliptycznym, prostokątnym, rurowym, cienkościennym zamkniętym lub otwartym. W kolejnych wykładach przedstawiona zostanie również pogłębiona interpretacja powyższych wzorów.