Wykład 3. Skręcanie nieskrępowane prętów o przekroju eliptycznym.

Hipoteza kinematyczna zakłada, jak poprzednio, sztywny obrót rzutu przekroju i jego deplanację w płaszczyźnie prostopadłej do rzutu:

$$u_1 = -\Theta' x_2 x_3 \qquad u_2 = \Theta' x_1 x_3 \qquad u_3 = \Theta' \psi\left(x_1, x_2\right)$$

Rozwiążemy zadanie "w naprężeniach", przyjmując funkcje naprężeń Prandtla znikającą "tożsamościowo" na brzegu elipsy o średnicach 2a i 2b w formie równania elipsy:

$$\varphi = C\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right) \tag{1}$$

Jak wiadomo, funkcja deplanacji w hipotezie kinematycznej wyrazi się przez φ następujaco:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{2(1+\nu)}{\Theta' E}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_2 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -\frac{2(1+\nu)}{\Theta' E}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_1 \tag{2}$$

wynika stąd warunek różniczkowy na φ:

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} = -2G\Theta'$$

Obliczmy stałą C z (1) tak, aby spełnić ten warunek:

$$C\left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}\right) = 2G\Theta' \;\Rightarrow\; C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\Theta' \tag{3}$$

$$\varphi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\Theta' \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right) \tag{4}$$

Obliczymy naprężenia:

$$\tau_{13} = -2x_2 \frac{a^2}{a^2 + b^2} G\Theta' \qquad \tau_{23} = 2x_1 \frac{b^2}{a^2 + b^2} G\Theta' \tag{5}$$

Warunki równowagi są, oczywiście, automatycznie spełnione i nie musimy tego sprawdzać.

Rozpatrzmy warunki brzegowe naprężeniowe na powierzchni przekroju poprzecznego.
Suma rzutów na osie x1 i x2 znika, moment wokół osi x_3 wynosi:

$$M_s = 2\int_s \varphi\, dx_1 dx_2 \qquad \Rightarrow \qquad M = 2C\int_s \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right) dx_1 dx_2$$

$$M = 2C\int_{-a}^{a} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}} \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right) dx_2 dx_1$$

$$M = 2C\int_{-a}^{a}\left(\frac{x_1^2}{a^2}x_2+\frac{x_2^3}{3b^2}-x_2\right)\Bigg|_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}}dx_1$$

$$M = 2C\frac{4b}{3a^3}\int_{-a}^{a}\left(x_1^2\sqrt{a^2-x_1^2}-a^2\sqrt{a^2-x_1^2}\right)dx_1$$

$$M = 2\frac{4b}{3a^3}C\left[\left(-\frac{x}{4}\left(a^2-x_1^2\right)\sqrt{a^2-x_1^2}+\frac{a^2}{8}x\sqrt{a^2-x_1^2}+\frac{a^4}{8}arc\,sin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a}-a^2\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x_1^2}+\frac{a^2}{2}arc\,sin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a}\right]$$

$$M = 2\frac{4b}{3a^3}C\left(-\frac{x}{4}\left(a^2-x_1^2\right)\sqrt{a^2-x_1^2}-\frac{3a^2}{8}x\sqrt{a^2-x_1^2}-\frac{3a^4}{8}arc\,sin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$M = -\pi abC$$

$$M = \frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}G\Theta'$$

Można teraz podać wzór na jednostkowy kąt skręcenia w typowej postaci, wyrażony przy pomocy wskaźnika sztywności przekroju na skręcanie J_s:

$$\Theta' = \frac{M_s}{J_sG} \tag{6}$$

$$J_s = \frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}$$

Podobnie naprężenia (5) można teraz wyrazić przez w funkcji momentu skręcającego. Do obliczenia τ^{max} użyjemy wskaźnika wytrzymałości na skręcanie W_s:

$$\tau_{13} = -2x_2\frac{a^2}{a^2+b^2}\frac{M_s}{J_s} \qquad \tau_{23} = 2x_1\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{M_s}{J_s} \tag{7}$$

$$\tau^{max} = \frac{M_s}{W_s} \qquad W_s = \frac{\pi a\ b^2}{2} \quad \text{jeśli} \quad b<a \tag{8}$$

Do wykonania obliczeń wytrzymałościowych wystarczy użyć wzorów (6) i (8).
Aby łatwiej wyobrazić sobie jak wygląda spaczony przekrój poprzeczny pręta wyznaczymy teraz funkcję deplanacji, całkując wzory (2). Zauważmy, że funkcja naprężeń Prandtla (4) wyraża sie również wzorem:

$$\varphi = -\frac{M_s}{\pi ab}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \left(-\frac{2J_s}{\pi ab^3} + 1\right)x_2 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \left(\frac{2J_s}{\pi ba^3} - 1\right)x_1 \tag{10}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right)x_2 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right)x_1 \tag{11}$$

$$\psi = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right)x_2 x_1 + f_2(x_2) \qquad \psi = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right)x_2 x_1 + f_1(x_1) \tag{12}$$

$$\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right)x_2 x_1 + f_2(x_2) = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right)x_2 x_1 + f_1(x_1) \tag{13}$$

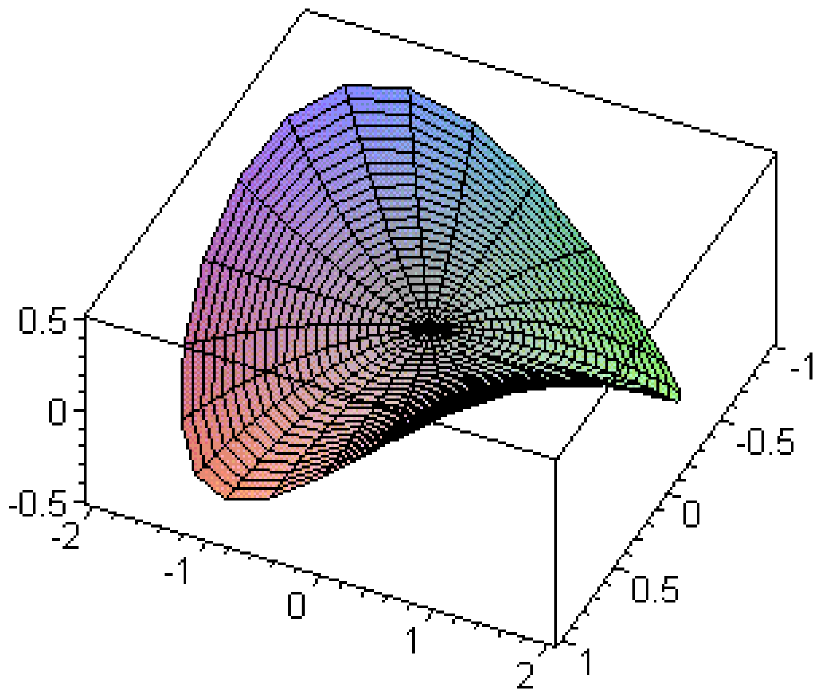
$$f_2(x_2) = f_1(x_1) = F$$

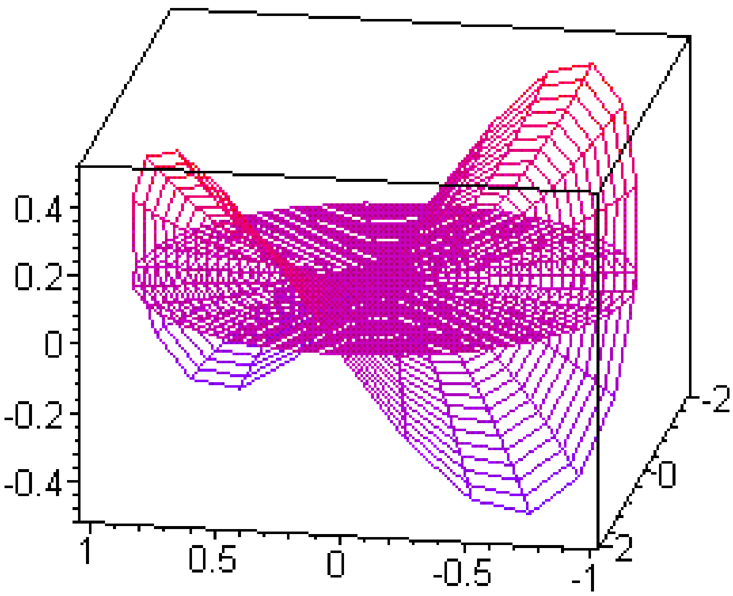
F jest translacją, można ją przyjąć równą zeru, stąd wzór na funkcję spaczenia:

$$\psi = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right)x_2 x_1$$

Zauważmy, że dla koła, gdy a=b=R, spaczenie znika, jak to było zakładane w teorii skręcania prętów okrągłych !

Dla elipsy a=2b, G=1, Ms=1 otrzymuje się wykres "poglądowy" następujący:





oba rysunki przedstawiają ten sam przypadek, na dolnym naniesiono dodatkowo płaszczyznę elipsy nie zdeformowanej