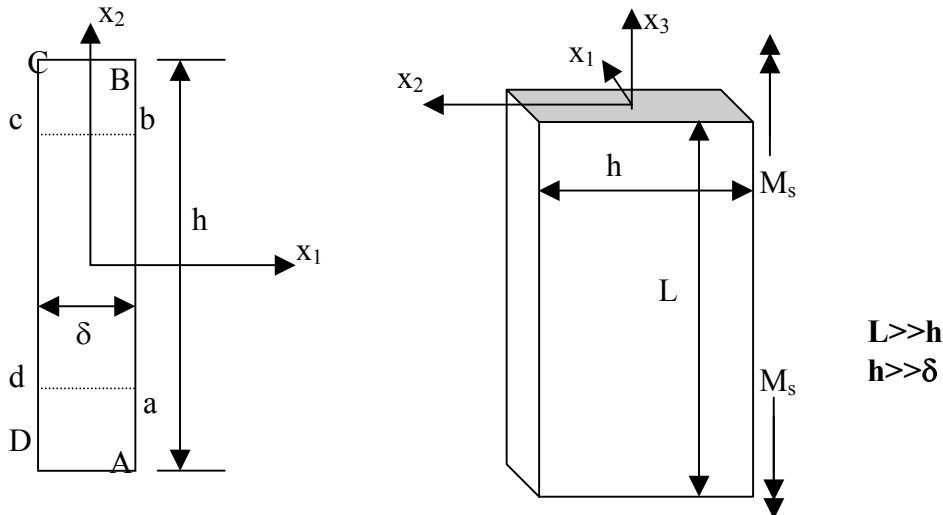


## Wykład 4. Skrećanie nieskrępowane prętów o przekroju cienkościennym otwartym i zamkniętym.

### Pręt o przekroju cienkościennym otwartym

Dla przekroju pręta pokazanego na rysunku 1 przyjmijmy funkcje naprężeń Prandtla, która tylko w przybliżeniu, spełnia warunek brzegowy.



Rys. 1. Przekrój i szkic pręta cienkościennego o przekroju prostokątnym. Rzeczywiste proporcje prostokąta powinny być inne niż wyobrażone na rysunku. Aby przybliżona teoria nie prowadziła do dużych błędów, figury na rysunku powinny być bardziej smukłe.

Załóżmy, że zamiast znikać na całym obwodzie  $\partial S$ , funkcja ta jest równa zero tylko na bokach AB i CD (równanie (2)). Można wobec tego przyjąć ją w formie równania (1) powierzchni cylindrycznej nad S. Łatwo sobie wyobrazić, że taka powierzchnia jest, poza obszarem BCbc DAda, prawidłową funkcją naprężeń.

$$\varphi = \varphi(x_1) \quad (1)$$

$$\varphi(x_1 = -\delta/2) = \varphi(x_1 = \delta/2) = 0 \quad (2)$$

Niejednorodne równanie harmoniczne redukuje się do postaci:

$$\varphi_{,11} = -2G\Theta' \quad (3)$$

Łatwo obliczyć stałe całkowania w paraboli spełniającej (3) aby spełnić warunek (2). Otrzymuje się następujące wyrażenie na  $\varphi$ :

$$\varphi = G\Theta' \left( \frac{\delta^2}{4} - x_1^2 \right) \quad (4)$$

Obliczymy naprężenia:

$$\tau_{13} = 0 \quad \tau_{23} = 2G\Theta'x_1 \quad (5)$$

Moment skręcający wynosi:

$$M_s = 2 \int_s \varphi dx_1 dx_2 \quad \Rightarrow \quad M = 2G\Theta' \int_s \left( \frac{\delta^2}{4} - x_1^2 \right) dx_1 dx_2 = \frac{1}{3} \delta^3 h G \Theta' \quad (6)$$

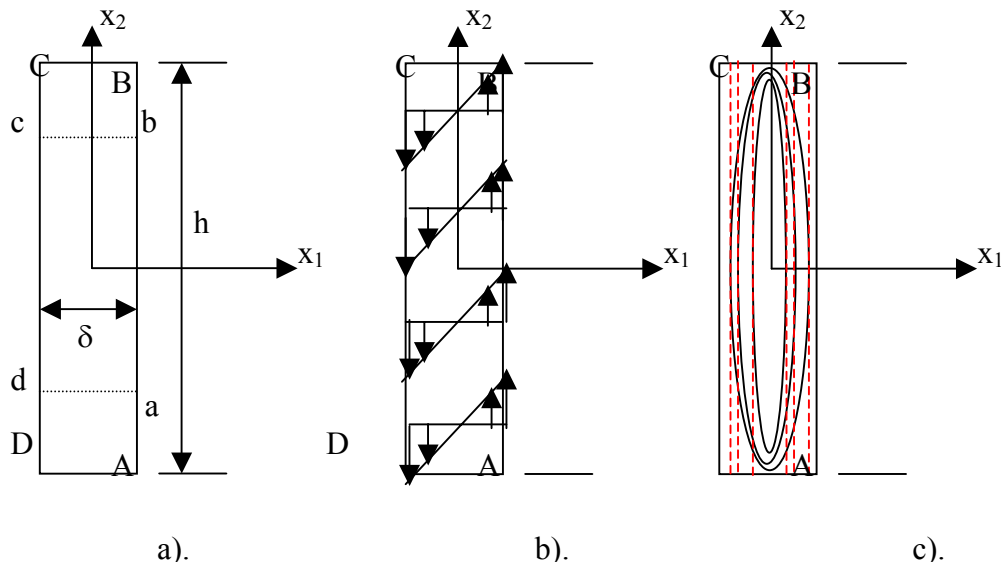
Można teraz podać wzór na jednostkowy kąt skręcenia w typowej postaci, wyrażony przy pomocy wskaźnika sztywności przekroju na skręcanie  $J_s$ :

$$\Theta' = \frac{M_s}{J_s G} \quad \text{gdzie} \quad J_s = \frac{\delta^3 h}{3} \quad (7)$$

Podobnie naprężenia (5) można teraz wyrazić w funkcji momentu skręcającego. Do obliczenia  $\tau^{\max}$  użyjemy wskaźnika wytrzymałości na skręcanie  $W_s$ :

$$\tau_{13} = 0 \quad \tau_{23} = 2 \frac{M_s}{J_s} x_1 \quad (8)$$

$$\tau^{\max} = \tau_{23} \left( x_1 = \frac{\delta}{2} \right) = \frac{M_s}{W_s} \quad W_s = \frac{\delta^2 h}{3} \quad (9)$$



Rys. 2. a). - przekrój cienkościenny prostokątny; b). wykres naprężeń według przedstawionej powyżej teorii przybliżonej; c). warstwy naprężeń zgodnych z teorią skręcania prętów niekołowych - owalne kontury (nie są to elipsy!), warstwy naprężeń przybliżonych - proste, linia przerywana.

## Złożony przekrój cienkościenny otwarty.

Rozpatrzmy pręt o przekroju, który da się rozłożyć na skończoną ilość  $N$  przekrojów będących smukłymi prostokątami. Załóżmy, że ich linie środkowe nie tworzą żadnej łamanej zamkniętej (Rysunek 3).

Zamierzamy wykorzystać wzory uzyskane dla pojedynczego przekroju prostokątnego o małej szerokości. Kluczem do tego jest następujące założenie, opisujące wspólną pracę myślowo wyodrębnionych fragmentów przekroju:

- jednostkowy kąt obrotu  $i$ -tego  $\Theta_i$  fragmentu jest wspólny dla wszystkich fragmentów składowych i taki jak dla całości przekroju  $\Theta$
- wypadkowy moment skręcający  $M_s$  jest sumą momentów wypadkowych  $M_i$  obliczonych dla każdego wyodrębnionego,  $i$ -tego fragmentu.

Te dwa założenia sformułowane są przy pomocy wzorów (10):

$$M_s = \sum_{i=1}^N M_i \quad \forall i \quad \Theta_i = \Theta \quad (10)$$

Dla każdego pręta składowego możemy podać jego indywidualną sztywność. pozostaje ustalić wzór na sztywność pręta złożonego (całkowitą), której rolę można odczytać z wzoru (11<sub>3</sub>).

$$\Theta_i = \frac{M_{si}}{J_{si} G} \quad \text{gdzie} \quad J_{si} = \frac{\delta_i^3 h_i}{3} \quad \Theta_i = \frac{M_s}{J_s^c G} = \Theta \quad J_s^c = ? \quad (11)$$

Proste przekształcenia pokazują, że sztywność całkowita jest sumą sztywności składowych:

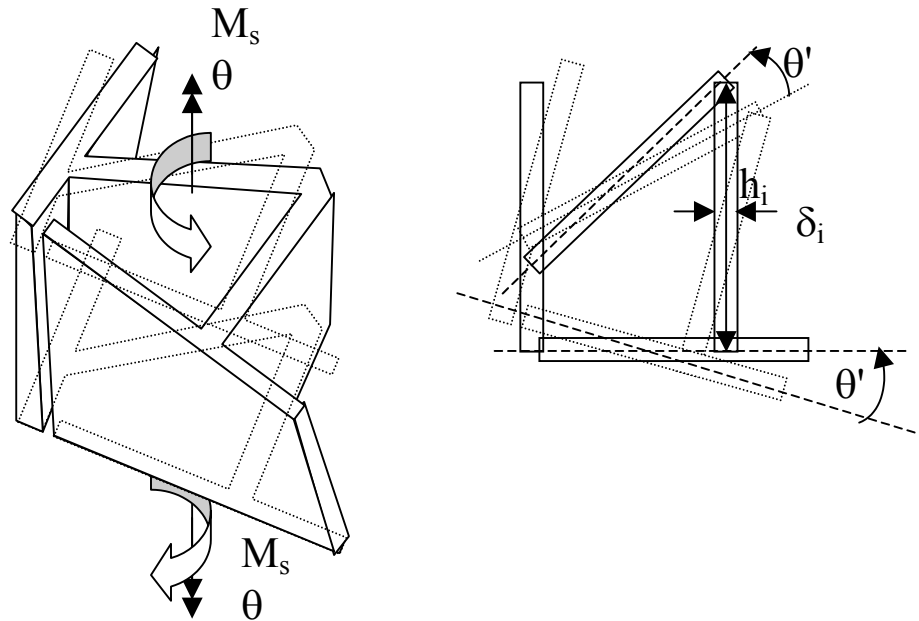
$$\Theta G J_s^c = \sum_{i=1}^N \Theta_i J_{si} G = \Theta G \sum_{i=1}^N J_{si} \quad J_s^c = \sum_{i=1}^N J_{si} = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^3 h_i}{3} \quad (12)$$

Moment skręcający przenoszony przez każdy pręt składowy jest częścią momentu całkowitego, proporcjonalną do sztywności tego pręta:

$$\Theta_i = \frac{M_{si}}{J_{si} G} = \Theta = \frac{M_s}{J_s^c G} \quad M_{si} = \frac{J_{si}}{J_s^c} M_s \quad (13)$$

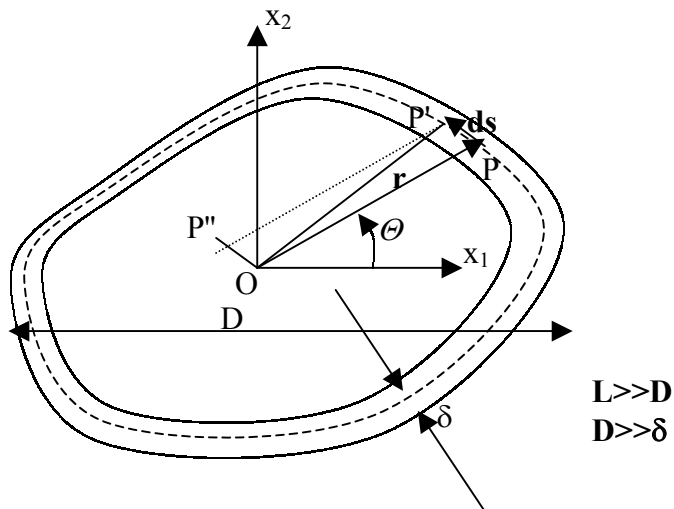
Obliczenie maksymalnego naprężenia ścinającego wynika z wzorów (9) i jest podane poniżej:

$$\tau^{max} = \tau_i^{max} = \left( \frac{M_{si}}{J_{si}} \delta_i \right)_{max} = \left( \frac{J_{si}}{J_s^c} M_s \frac{\delta_i}{J_{si}} \right)_{max} = \frac{M_s}{J_s^c} \delta_{max} \quad W_s^c = \frac{J_s^c}{\delta_{max}} \quad (14)$$



Rysunek 3. Przekrój złożony (a), jego rozkład na przekroje składowe (b), oznaczenia.

### Skrećanie nieskrepowane prętów o przekroju cienkościennym zamkniętym.



Rys. 2. Przekrój i szkic pręta cienkościennego zamkniętego.

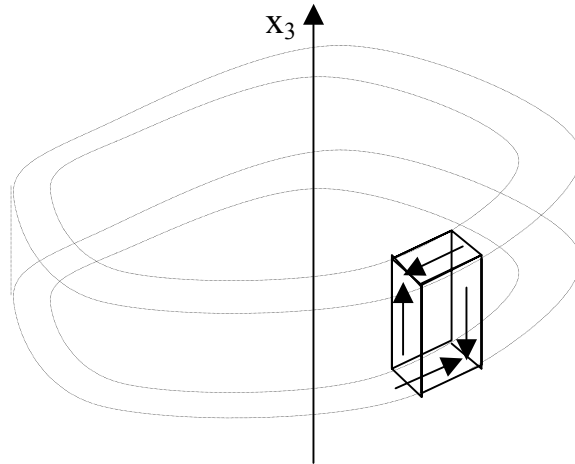
Przyjmijmy, następujące założenie upraszczające dotyczące stanu naprężenia w przekroju:

- jedyną składową naprężenia w przekroju jest  $\tau_{31}$ ,
- naprężenie styczne jest równoległe do linii środkowej i stałe na grubości przekroju:

$$\bar{\tau}\delta(s) = \lambda d\bar{s} \quad \tau = \tau(s) \quad (15)$$

zależność  $\tau$  od współrzędnej łukowej  $s$  ustalimy obliczając sumę rzutów wektorów naprężeń na ściankach wycinka ścianki wyjętego myślowo z cieniłego plasterka o wysokości  $\delta z$ , jak na rysunku 3 (zależność grubości od współrzędnej łukowej jest dana):

$$\sum t_{i3} = 0 \Rightarrow \forall s_1, s_2 \quad \delta_1 \tau_1 = \delta_2 \tau_2 \quad \Rightarrow \tau(s) \delta(s) = const \quad (16)$$



Rys. 3. Wycinek pręta cienkościennego zamkniętego.

Obliczmy moment skręcający będący w równowadze z naprężeniami o takim rozkładzie:

$$M_s = \oint r \times \tau \delta ds = \tau \delta \oint r \times ds = 2A_0 \tau \delta \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_s}{2A_0 \delta} \quad (17)$$

Maksymalne naprężenie występuje, jak widać z powyższego wzoru, tam, gdzie przekrój jest najcieńszy:

$$\tau^{max} = \frac{M_s}{W_s} \quad W_s = 2A_0 \delta^{min} \quad (18)$$

Związek momentu z kątem skręcenia otrzymamy zapisując równość pracy momentu skręcającego na jednostkowym kącie skręcenia (praca sił zewnętrznych) i pracy sił wewnętrznych to jest: pracy naprężenia stycznego  $\tau$  (jedynej niezerowej składowej tensora naprężenia, wzór (1)) na kącie odkształcenia postaciowego  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_s \Theta' &= \frac{1}{2} \int_s \tau \gamma \delta ds & (19) \\ \frac{1}{2} M_s \Theta' &= \frac{1}{2} \int_s \frac{\tau^2}{G} \delta ds = \frac{1}{2} \int_s \frac{\tau^2 \delta^2}{G \delta} ds = \frac{\tau^2 \delta^2}{2G} \int_s \frac{ds}{\delta} = \frac{1}{2G} \frac{M_s^2}{4A_0^2} \int_s \frac{ds}{\delta} \\ \Theta' &= \frac{1}{G} \frac{M_s}{4A_0^2} \int_s \frac{ds}{\delta(s)} \end{aligned}$$

Otrzymany wzór na sztywność przekroju cienkościennego zamkniętego nazywa się wzorem Bredta:

$$\Theta' = \frac{M_s}{J_s G} \quad \text{gdzie} \quad J_s = \frac{4A_0^2}{\int_s \delta(s)} \quad (20)$$