

Adresy internetowe, pod którymi można znaleźć wykłady z Wytrzymałości Materiałów:
Politechnika Krakowska

<http://limba.wil.pk.edu.pl/kwm-edu.html>

Politechnika Łódzka

<http://kmm.p.lodz.pl/dydaktyka>

Wykład 5. Skręcanie nieskrępowane prętów o przekroju prostokątnym.

Hipoteza kinematyczna przyjęta jak poprzednio, rozważamy teorię skręcania prętów przedstawioną w wykładzie nr 2 i kolejnych. Rozwiążmy zadanie skręcania pręta o dowolnym przekroju znajdując funkcję Prandtla bezpośrednio, metodą numeryczną. Spełnia ona, jak wiadomo, niejednorodne równanie harmoniczne w obszarze S:

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} = -2G\Theta' \quad (1)$$

i jest równa zero na brzegu obszaru S.

Rozpatrzmy przekrój prostokątny (oczywiście, analityczne wyrażenie dla funkcji Prandtla jest możliwe, jednak w miarę komplikowania się kształtu konturu jego postać jest coraz bardziej skomplikowana i podejście analityczne wymaga złożonych przekształceń symbolicznych, podczas gdy algorytm rozwiązywania numerycznego jest zawsze taki sam, powtarzalny)

Prostokąt o bokach a i b pokryjemy siatką punktów, w których obliczymy wartości funkcji Prandtla. Na boku a umieścimy M punktów odległych od siebie o dx, na boku b umieścimy N punktów odległych o dy. Przyjmijmy, że $G\Theta'=1$.

Uprościmy zapis następująco:

$$\varphi(x_1^i, x_2^j) = \varphi^{ij} \quad (2)$$

ponieważ wszystkie wartości funkcji Prandtla w punktach x_1^i, x_2^j utworzą wektor niewiadomych, potrzebna jest jeszcze inna numeracja: numerując niewiadome rzędami otrzymamy dla danego i, j niewiadomą nr k, oznaczoną $f(k)$, według wzoru:

$$f(k) = \varphi^{ij} \quad \text{gdzie } k=(i-1)M+j \quad (3)$$

Jak wiadomo, drugą pochodną ze względu na x_1 (i podobnie dla x_2) można w przybliżeniu zapisać następująco:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(x_1^i, x_2^j) = \frac{\varphi^{i+1,j} - 2\varphi^{ij} + \varphi^{i-1,j}}{dx_1^2} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(x_1^i, x_2^j) = \frac{\varphi^{i,j+1} - 2\varphi^{ij} + \varphi^{i,j-1}}{dx_2^2} \quad (4)$$

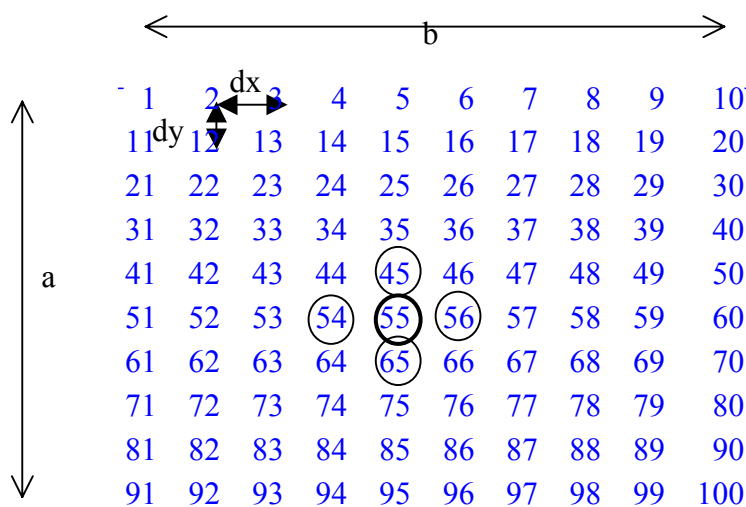
Równanie różniczkowe (1) można więc zastąpić układem równań z niewiadomymi $f(k)$, zastępując pochodne ich przybliżonymi wartościami różnicowymi, dla każdego punktu w obszarze S. (Na brzegu ∂S wartości f są dane i równe zero).

Przyjmijmy, że $G\Theta'=1$. Nie zmniejsza to ogólności rozważań, zawsze możemy wynik pomnożyć przez właściwe $G\Theta'$. Dla punktu o współrzędnej i,j otrzymamy równanie (5):

$$\frac{\varphi^{i+1,j} - 2\varphi^{ij} + \varphi^{i-1,j}}{dx_1^2} + \frac{\varphi^{i,j+1} - 2\varphi^{ij} + \varphi^{i,j-1}}{dx_2^2} = -2 \quad (4)$$

$$\frac{1}{dx_1^2} \varphi^{i+1,j} + \frac{1}{dx_1^2} \varphi^{i-1,j} - 2 \left(\frac{1}{dx_1^2} + \frac{1}{dx_1^2} \right) \varphi^{ij} + \frac{1}{dx_2^2} \varphi^{i,j+1} + \frac{1}{dx_2^2} \varphi^{i,j-1} = -2 \quad (5)$$

Mamy tyle równań ile niewiadomych (punkty wewnętrzne w S). Schemat budowy układu równań na siatce punktów przedstawia rysunek 1. Pokazano tu schemat równania napisanego dla niewiadomej o numerze 55 czyli dla $i=6$ i $j=5$.



Rozwiązując taki układ równań, otrzymuje się wartości funkcji Prandtla nad przekrojem S. Ich wykres przedstawia rysunek 2. Naprężenia otrzymuje się zastępując wzory na pochodne - odpowiednimi ilorazami różnicowymi. Warto przyjąć dla punktów wewnętrznych ilorazy dokładniejsze, dające następujące wzory na naprężenia (6) i (7).

$$\tau_{13} = \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cong \frac{1}{2dx_2} (\varphi^{i,j+1} - \varphi^{i,j-1}) \quad (6)$$

$$\tau_{23} = -\frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cong \frac{1}{2dx_1} (\varphi^{i+1,j} - \varphi^{i-1,j}) \quad (7)$$

Prawdziwą wartość naprężeń otrzyma się mnożąc powyższe wzory przez $G\Theta$. Na rysunku 3 przedstawiono wykresy naprężeń dla prostokąta.

Pozostaje problem obliczenia sztywności (potrzebnej do znalezienia Θ). Łatwo się przekonać, że wzór na sztywność jest następujący:

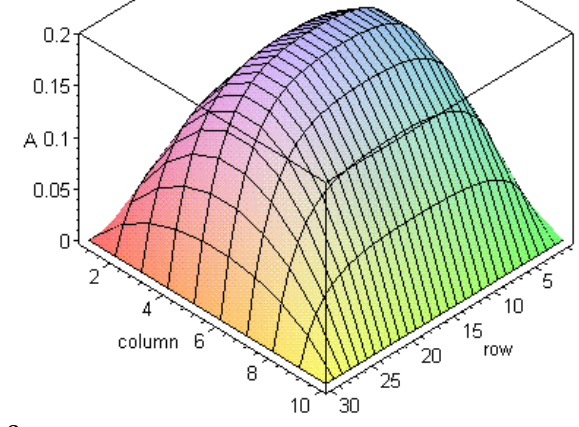
$$M_s = JG\Theta' \quad \text{i jednocześnie} \quad M_s \cong \left(2 \sum_{i=1, j=1}^{N, M} \varphi^{ij} dx_1 dx_2 \right) G\Theta' \quad (8)$$

$$\text{stad:} \quad J \cong 2 \sum_{i=1, j=1}^{N, M} \varphi^{ij} dx_1 dx_2 \quad (9)$$

W ten sposób mamy wszystkie elementy niezbędne do zaprojektowania dowolnego przekroju skręcanego. Rysunki poniższe przedstawiają wyniki obliczeń dla prostokąta o stosunku

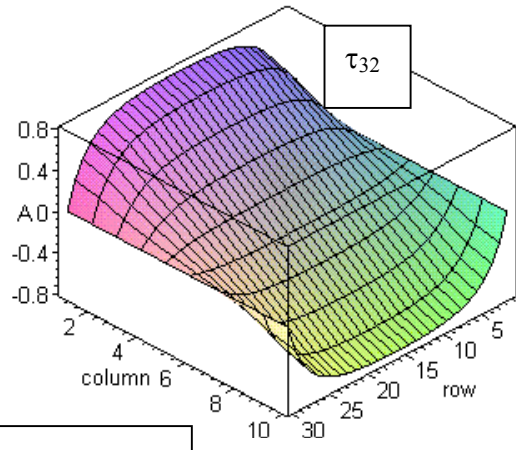
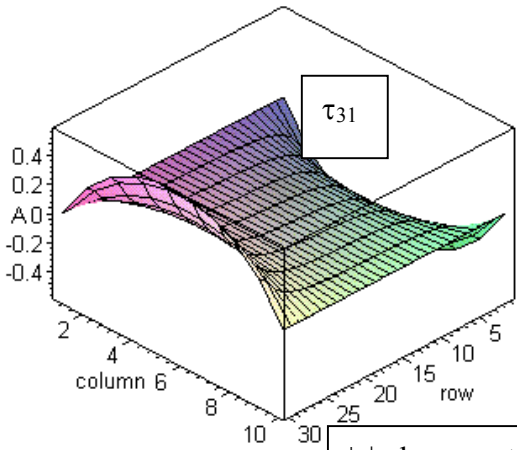
boków 3:1. Kolejne rysunki przedstawiają rozwiązanie tego samego zadanie dla przekroju prostokątnego z wycięciem kwadratowym i prostokątnego - smukłego.

Funkcja Prandtla dla prostokąta o stosunku boków 3:1.
Widok w skali skażonej (a) i plan warstwicowy (b) (1:1)

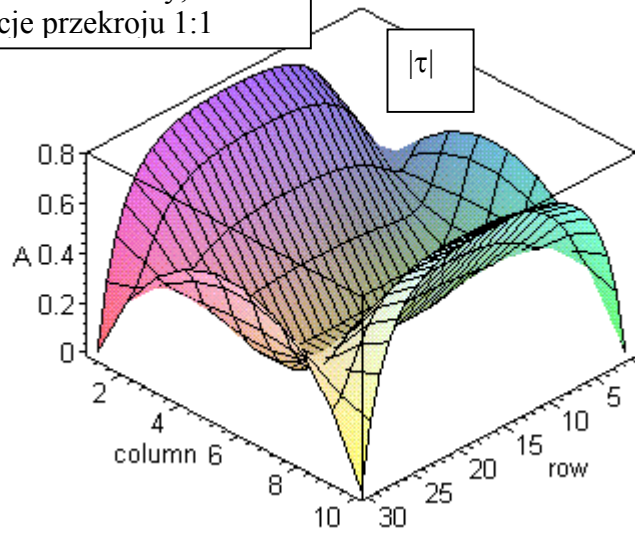
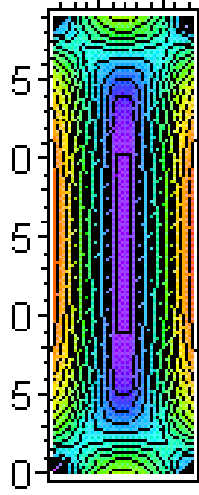


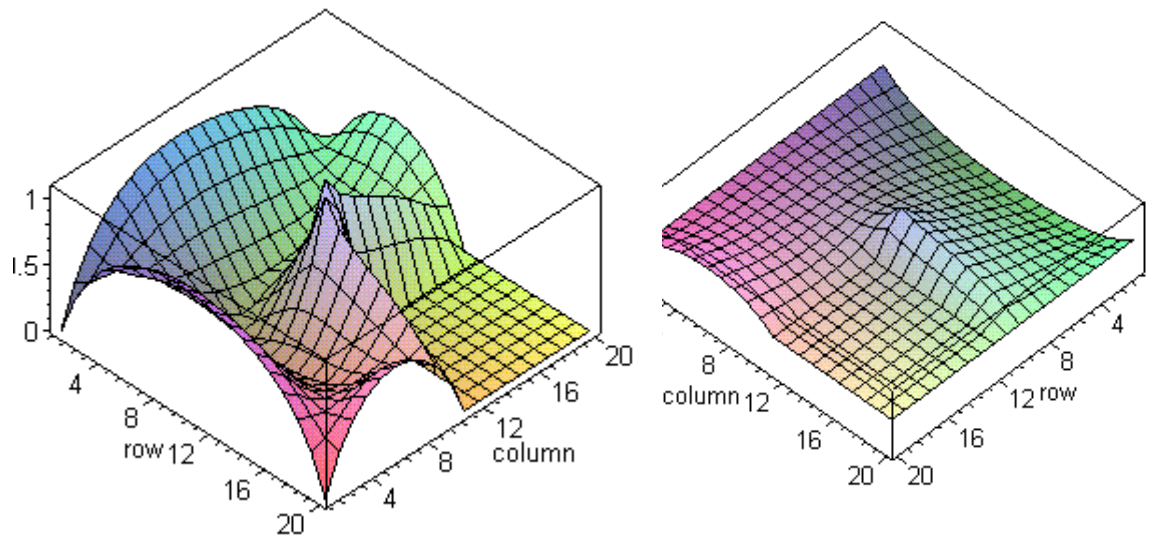
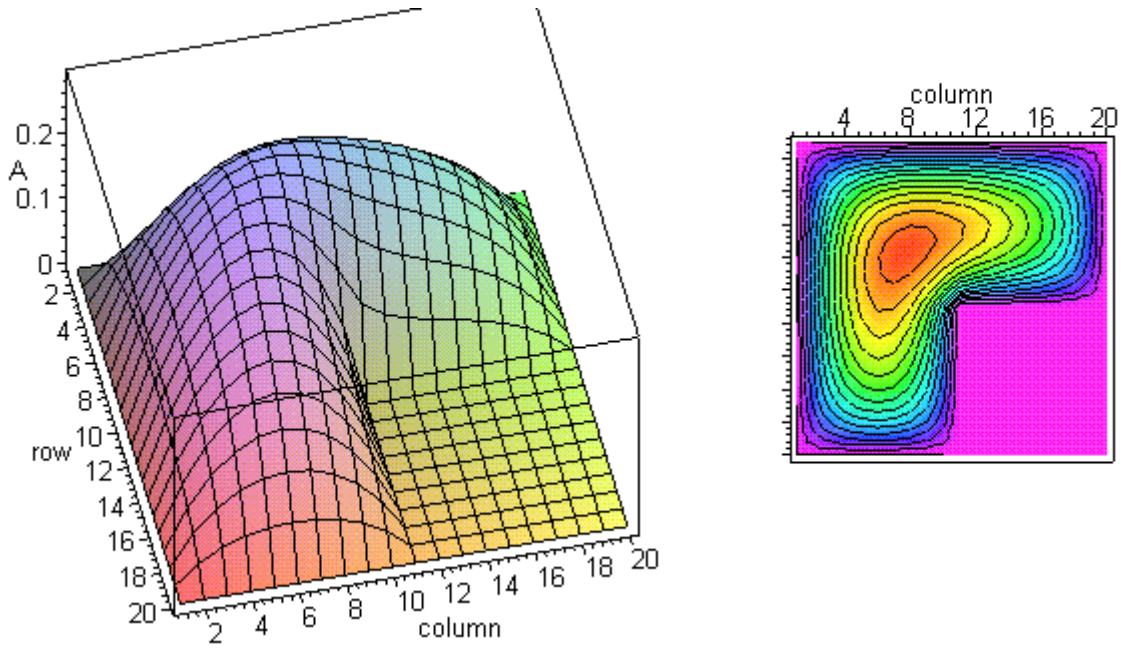
a.

b.

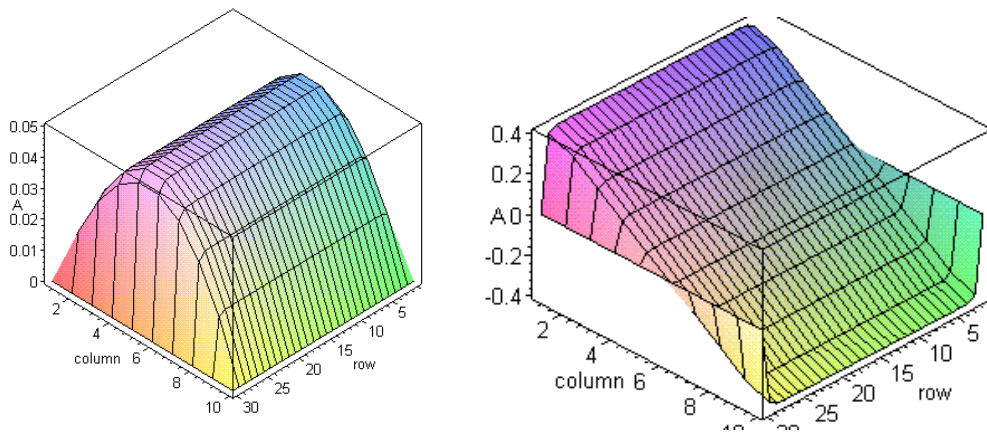


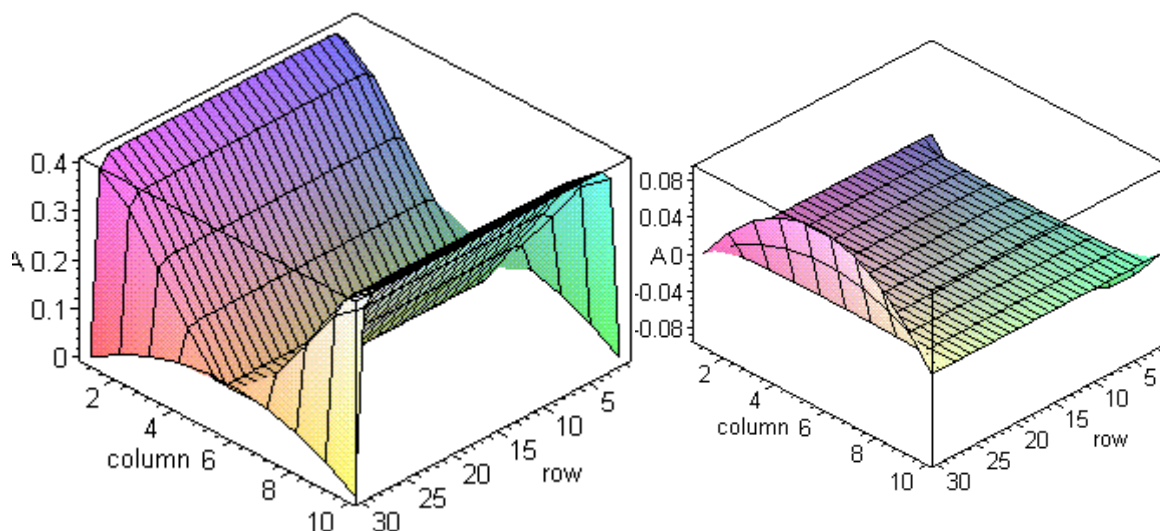
$|\tau|$ plan warstwicowy,
proporcje przekroju 1:1





Funkcja Prandtla dla przekroju z wycięciem - (a) widok i (b) plan warstwiczny. Wykres c) - długość wektora naprężenia stycznego oraz (d) składowa τ_{31} .





Przekrój smukły. Stosunek boków 1:15. Na rysunkach powyższych proporcje skażone. Funkcja Prandtla (a), składowa naprężenia τ_{31} (b), długość wektora naprężenia stycznego oraz składowa naprężenia τ_{32} (d).

5.1. Tablice do wymiarowania na skręcanie prętów o przekroju prostokątnym

Wobec tego, że wykonywanie obliczeń na skręcanie dla prętów prostokątnych wymaga rozwiązania równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, co może być czasochłonne - większość tablic inżynierskich oraz podręczniki do Wytrzymałości Materiałów (w tym podręcznik A. Jakubowicza i Z. Orłósia) publikują tabele do wymiarowania takich przekrojów. Tabele takie zawierają współczynniki do obliczania sztywności skrętnej, wskaźnika wytrzymałości na skręcanie oraz maksymalnego naprężenia stycznego, obliczone na podstawie rozwiązania problemu skręcania dla prostokąta o zadanym stosunku długości boków. Korzystając z takich tablic można obliczyć sztywność skrętną, wskaźnik wytrzymałości na skręcanie oraz maksymalne naprężenie styczne znając długość jednego boku i interpolując liniowo wartości współczynników pomiędzy dwoma najbliższymi proporcjami boków prostokąta, zapisanymi w tabeli.