

Wykład 6. Analogia błonowa, analogia hydrodynamiczna, skręcanie sprężysto - plastyczne.

6.1. Analogia błonowa

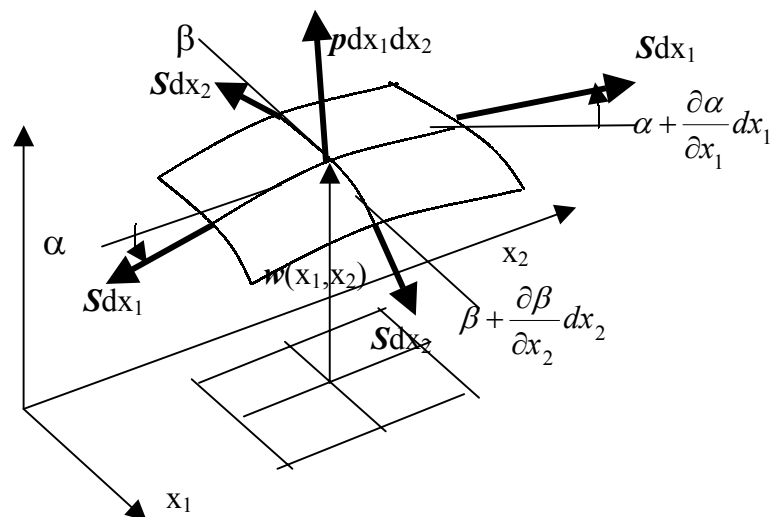
Analogia błonowa służy wizualizacji przebiegu funkcji naprężeń Prandtla dla dowolnego konturu przekroju pręta skręcanego. Analogii tej można również użyć w celu doświadczalnego wyznaczenia naprężeń stycznych w przekroju.

Analogię tę można sformułować w postaci następującego twierdzenia:

Wartości funkcji Prandtla w punktach przekroju o danym konturze są proporcjonalne do odległości od tego przekroju powierzchni membrany napiętej na tym konturze i obciążonej równomiernym ciśnieniem o kierunku prostopadłym do przekroju.

Aby wykazać, że tak jest, wyprowadzimy równanie membrany rozpiętej na konturze przekroju i obciążonej równomiernym ciśnieniem p . Ciśnienie to jest skierowane zawsze prostopadle do odkształconej powierzchni membrany.

Założymy, że w membranie panuje płaski stan naprężenia. W każdym punkcie membrany naprężenie główne prostopadłe do jej powierzchni znika zaś pozostałe naprężenia główne są identyczne mają wartość s i nie zależą od x_1, x_2 . Zakładamy, że przemieszczenia punktów na powierzchni membrany $w(x_1, x_2)$ są małe na tyle, że $\cos\gamma \approx 1$, $\sin\alpha \approx \text{tg}\alpha \approx \alpha$. (Oznaczenia jak na rysunku poniżej)



Rysunek 6.1 Wycinek membrany rozpiętej nad konturem przekroju. Zaznaczono wypadkowe naprężenia w membranie i wypadkowa ciśnienia działającego na wycinek.

Równowaga wycinka membrany - suma rzutów sił działających na wycinek na oś x_3 - zapisuje się następująco:

$$\begin{aligned}
& -sdx_2 \sin\alpha + sdx_2 \sin\left(\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial x_1} dx_1\right) - sdx_1 \sin\beta + sdx_1 \sin\left(\beta + \frac{\partial\beta}{\partial x_2} dx_2\right) + pdx_1 dx_2 \cos\gamma = 0 \\
& -sdx_2 \alpha + sdx_2 \left(\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial x_1} dx_1\right) - sdx_1 \beta + sdx_1 \left(\beta + \frac{\partial\beta}{\partial x_2} dx_2\right) + pdx_1 dx_2 \cong 0 \\
& sdx_2 \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} dx_1\right) + sdx_1 \left(\frac{\partial\beta}{\partial x_2} dx_2\right) + pdx_1 dx_2 \cong 0 \text{ ponieważ } \alpha = \frac{\partial w}{\partial x_1} \text{ oraz } \beta = \frac{\partial w}{\partial x_2} : \\
& s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) + s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + p \cong 0
\end{aligned}$$

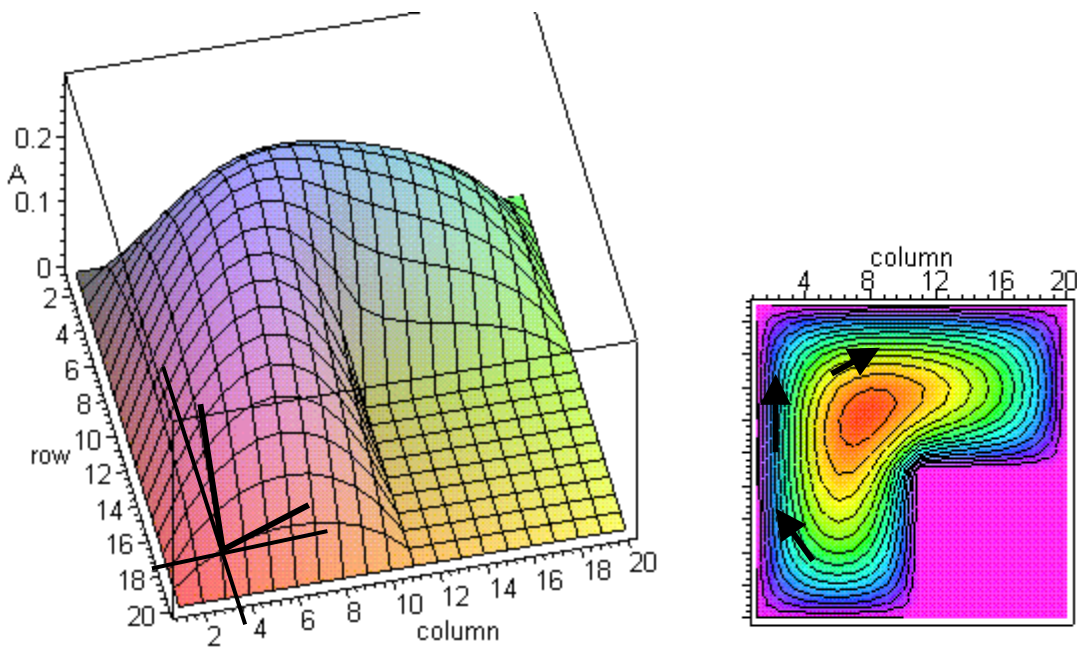
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \cong -\frac{p}{s} \quad (1)$$

Widać, że równanie powierzchni membrany jest formalnie identyczne z równaniem jakie musi spełniać funkcja Prandtla:

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} = -2G\theta' \quad (2)$$

Wynika stąd, że funkcja Prandtla jest proporcjonalna do funkcji przemieszczenia membrany, jako rozwiązanie tego samego równania różniczkowego. Jeśli (1) i (2) przekształcić tak aby były identyczne (niech prawa strona będzie równa 1) to otrzyma się φ wyrażone przez w :

$$\varphi = \frac{2\theta'Gs}{p} w = cw$$



Rysunek 6.2. Po lewej - kąty, których tangens jest proporcjonalny do modułu wartości odpowiedniej składowej naprężenia stycznego, po prawej - rysunek orientacyjny wektora naprężenia stycznego do warstwic membrany.

Jeśli w eksperymencie uda się zmierzyć $w(x_1, x_2)$ - ugięcie napiętej membrany, to otrzymamy łatwo funkcję Prandtla bez konieczności rozwiązywania równania różniczkowego.

Łatwo można się przekonać, że:

- składowa naprężenia stycznego może być zilustrowana jako kąt nachylenia stycznej do powierzchni ugięcia membrany w danym punkcie.

$$\tau_{31} = c \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad \tau_{32} = -c \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

- maksymalna wartość naprężenia występuje tam, gdzie nachylenie membrany do przekroju jest największe
- Wektor naprężenia stycznego jest równoległy do warstwic membrany

6.2. Analogia hydrodynamiczna.

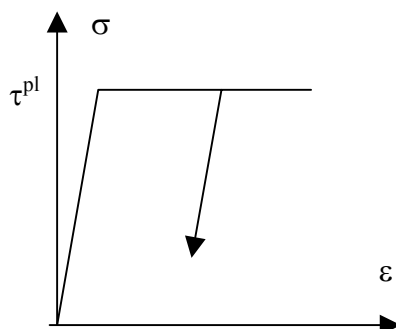
Analogia hydrodynamiczna dla przekroju skręcanego cienkościennego zamkniętego:

Kierunek wektora naprężenia stycznego dla przekroju cienkościennego zamkniętego jest styczny do linii prądu cieczy nielepkiej wirującej w naczyniu cylindrycznym, którego podstawą jest przekrój pręta zaś tworzące pręta są ściankami bocznymi naczynia.

Długość wektora naprężeń jest proporcjonalna do prędkości wirującej cieczy.

6.3. Skręcanie sprężysto - plastyczne.

Jak wiadomo z badań eksperymentalnych, naprężenia nie mogą przyjmować wartości dowolnie dużych. Wyobraźmy sobie w uproszczeniu, że dla stanu, w którym występują tylko składowe styczne - obszar dopuszczalny ograniczony jest od góry wartością τ_{dop} (dopuszczalne). Związek γ - τ przedstawiony jest na rysunku 6.3.

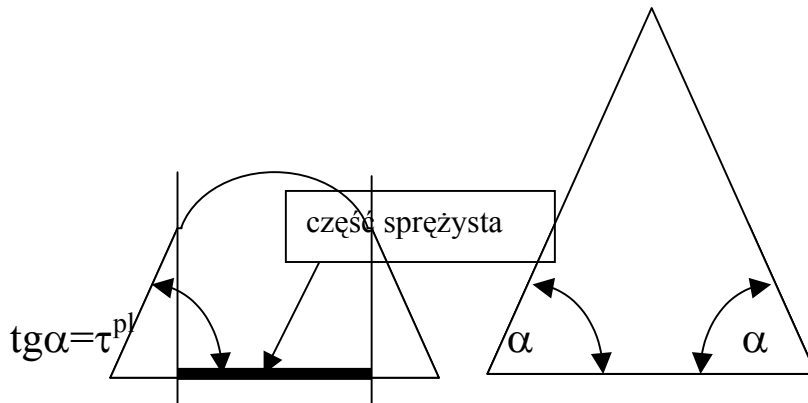


Rysunek 6.3. Zachowanie elasto-idealnie plastyczne.

Widać, że wraz ze wzrostem kąta odkształcenia postaciowego naprężenie rośnie do pewnej wartości liniowo (prawo Hooke'a) później zaś pozostaje stałe. Taka idealizacja rzeczywistego zachowania materiału nazywa się modelem sprężysto - idealnie plastycznym.

Założmy, że w przekroju skręcanym, w którym naprężenia rozłożone są niejednorodnie - największe jego wartości osiągnęły już wartość graniczną. Wytworzył się zatem obszar wewnętrzny zwany "uplastycznionym", w którym naprężenia mają stałą wartość oraz obszar sprężysty, który nie pozwala na dowolnie dużą wartość kąta skręcenia. Styczna do funkcji

Prandtla dla takiego stanu ma nad obszarem uoplastycznionym styczna nachylona do konturu pod stałym kątem, w każdym punkcie konturu. Jest tak, gdyż maksymalne naprężenie napierw pojawia się na konturze. Przedstawia to rysunek 6.4.



Rysunek 6.4. Funkcja Prandtla dla przekroju uoplastycznionego częściowo i całkowicie.

W sytuacji granicznej, gdy naprężenia w każdym punkcie przekroju osiągają wartość dopuszczalną, funkcja Prandtla przyjmuje formę ostrosłupa o krawędziach równonachylonych do konturu. Taka sytuacja oznacza, że kąt obrotu tego przekroju jest dowolnie duży. Powstał w ten sposób przegub plastyczny, który tym różni się od przegubu plastycznego, że występuje w nim moment plastyczny M_{pl} , moment wypadkowy naprężeń plastycznych. Łatwo go obliczyć jako podwójną objętość zamkniętą bryłą ostrosłupa.

$$M_s = 2V$$

Jest tak, gdyż zgodnie ze znanym już wzorem (wykład 2) moment skręcający równy jest podwójnej całce z funkcji Prandtla po przekroju.