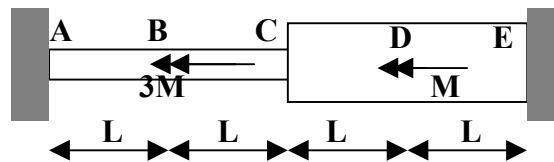


Wykład 7. Obliczenia wytrzymałościowe prętów skręconych. Skręcanie sprężyste i sprężysto - plastyczne.

Zadanie 1.

Załóżmy, że pręt składa się z dwóch odcinków o długościach jak na rysunku poniżej, nie precyzując kształtu przekrojów na każdym z odcinków, przyjmiemy, że na odcinku AC sztywność skrętna wynosi GJ_{s1} zaś na odcinku CE jest równa GJ_{s2} . Zakładamy, że zamocowania te są tak skonstruowane, że występują w nich jedynie momenty skręcające (oczywiście nawet gdyby były to pełne utwierdzenia przestrzenne to i tak inne siły i momenty różne od skręcającego byłyby równe zero). Obliczyć momenty utwierdzenia w punktach A i E. Narysować wykres momentu skręcającego i wykres kąta skręcenia.

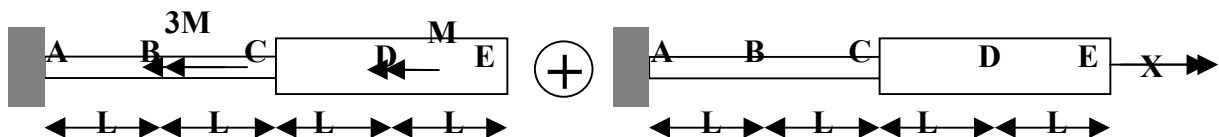


Rysunek 7.1. Pręt skręcony - dane.

Problem jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (dysponujemy jednym równaniem - sumą momentów na oś pręta, niewiadome zaś są dwie: M_A i M_E). Wobec tego uwolnimy myślowo jedną stronę pręta (w przekroju E) od więzu i obciążymy nieznanym momentem X. Aby schemat kinematyczny nie uległ zmianie - napiszemy warunek na kąt obrotu w tym miejscu:

$$\theta_E(X, M_B, M_D) = 0 \quad (7.1)$$

θ_E Jest kątem skręcenia pręta względem przekroju początkowego, w którym mamy $\theta_A = 0$. Zadanie potraktujemy jako superpozycję dwóch zadań statycznie wyznaczalnych **a** oraz **b**, przedstawioną schematycznie na Rysunku 7.2.



Rysunek 7.2 Superpozycja: schemat podstawowy i schemat obciążony niewiadomym momentem utwierdzenia

Dla obu tych zadań łatwo obliczyć moment skręcający w kolejnych przekrojach. Wykresy momentów skręcających przedstawia Rysunek 7.3a. Aby zapisać warunek (7.1) należy użyć wzorów znanych z poprzednich wykładów:

$$\theta' = \frac{M}{GJ_s} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{GJ_s} \quad d\theta = \frac{M}{GJ_s} dx$$

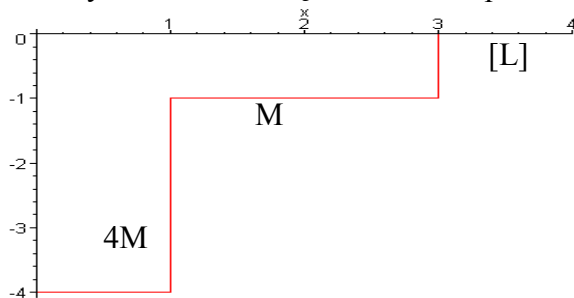
Dla stałego momentu skręcającego można napisać przyrost kąta pomiędzy punktami P i Q leżącymi w odległości l_{PQ} od siebie:

$$\Delta_{PQ}\theta = \frac{M}{GJ_s} \Delta_{PQ}x \quad \text{lub} \quad \Delta_{PQ}\theta = \frac{M}{GJ_s} l_{PQ}$$

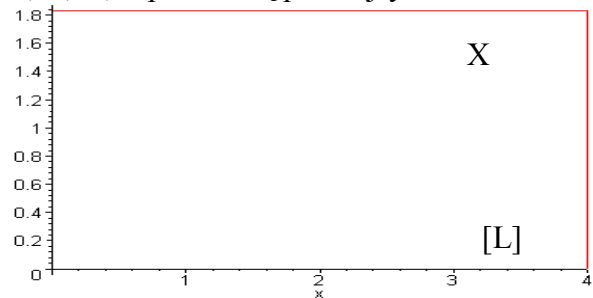
Dla momentu zmiennego można sumy zamienić na całki. Przyrost kąta między punktami x_0 i x jest wobec tego polem pod fragmentem wykresu momentów w tym przedziale:

$$\theta(x) = \theta(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{M(\xi)}{GJ_s} d\xi$$

Wyniki obliczeń kątów obrotu w punktach B, C, D, E podane są poniżej rysunku 7.3a



Rys. 7.3a. Moment skręcający na schemacie podstawowym



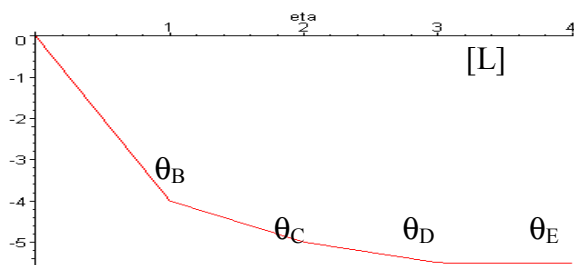
Rys. 7.3b. Moment skręcający od niewiadomej X

$$\theta_B = -\frac{4ML}{GJ_{s1}} \quad \theta_C = -\frac{5ML}{GJ_{s1}}$$

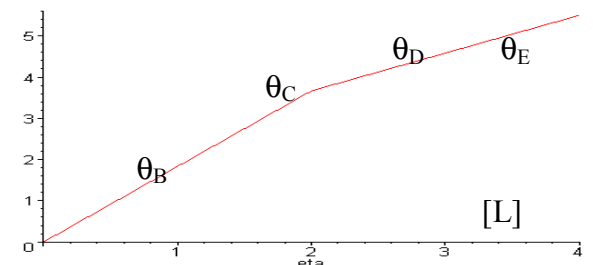
$$\theta_D = -\frac{5ML}{GJ_{s1}} - \frac{ML}{GJ_{s2}} \quad \theta_E = \theta_D$$

$$\theta_B = \frac{XL}{GJ_{s1}} \quad \theta_C = \frac{2XL}{GJ_{s1}}$$

$$\theta_D = \frac{2XL}{GJ_{s1}} + \frac{XL}{GJ_{s2}} \quad \theta_E = \frac{2XL}{GJ_{s1}} + \frac{2XL}{GJ_{s2}}$$



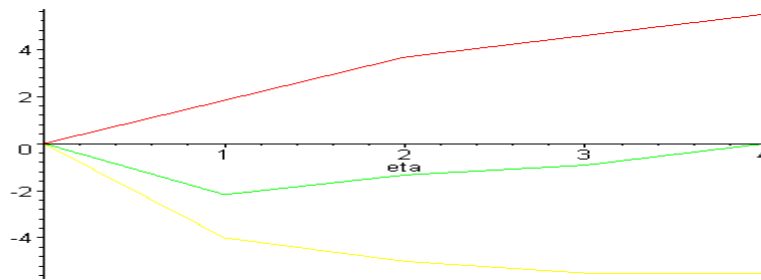
Rys. 7.3c. Kąt skręcenia na schemacie podstawowym



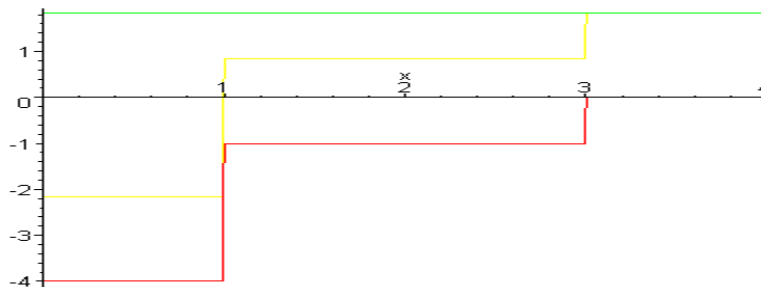
Rys. 7.3d. Kąt skręcenia od niewiadomej X

warunek (7.1): $\theta_D(M) + \theta_D(X) = -\frac{5ML}{GJ_{s1}} - \frac{ML}{GJ_{s2}} + \frac{2XL}{GJ_{s1}} + \frac{2XL}{GJ_{s2}} = 0$

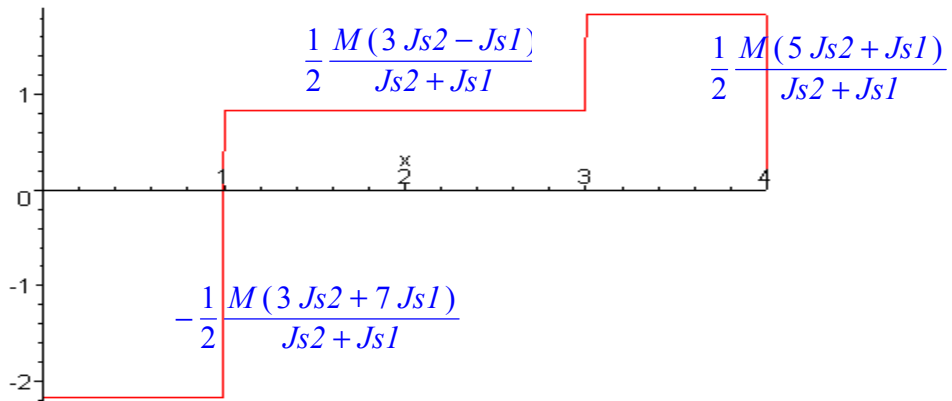
$$X = -\frac{1}{2} \frac{M(5J_{s2} + J_{s1})}{J_{s2} + J_{s1}}$$



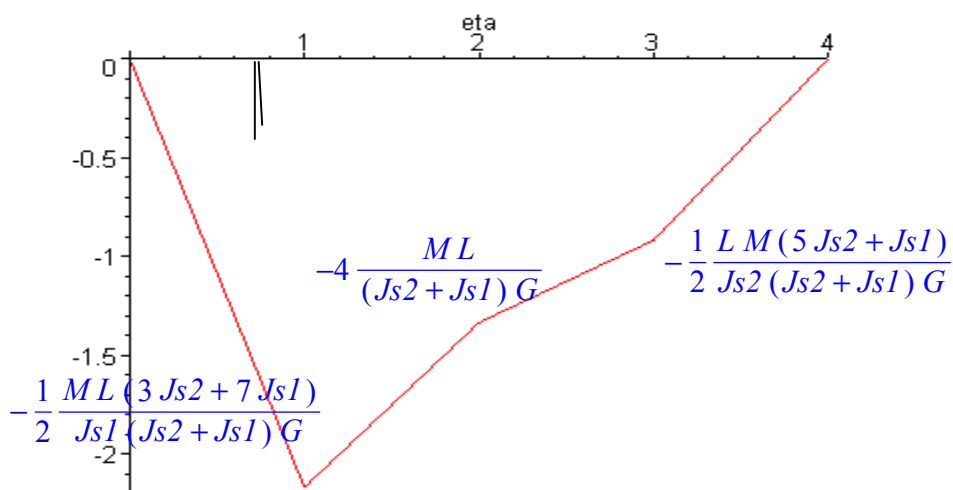
Rys. 7.3e. Całkowity kąt skręcenia: superpozycja dwu wykresów przedstawionych powyżej.



Rys. 7.3f. Wypadkowy moment skręcający, superpozycja dwu wykresów przedstawionych na Rys. 7.3a i 7.3b..



Rys. 7.3g. Wykres momentu skręcającego na pręcie zamocowanym dwustronnie

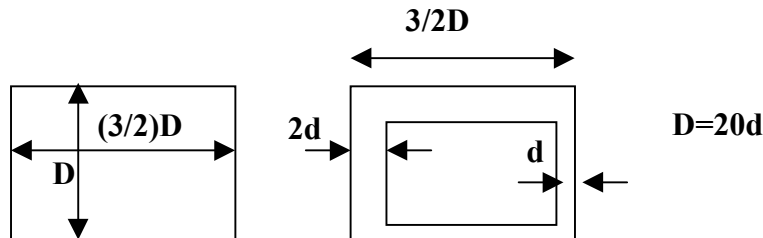


Rys. 7.3h. Wykres kąta skręcenia na pręcie zamocowanym dwustronnie

Rysunek 7.3. Pręt skręcany - rozwiązanie. Wykresy narysowano dla wartości $J_{s2}=2J_{s1}$.

Zadanie 2.

Dla pręta jak w zadaniu 1 przyjmując przekroje na odcinkach AC i CD odpowiednio: prostokątny i cienkościenny zamknięty, tak jak to pokazano na Rysunku 7.4. Obliczyć momenty utwierdzenia w punktach A i E. Narysować wykres momentu skręcającego i wykres kąta skręcenia. Narysować wykresy naprężeń stycznych w obu przekrojach. Dla ćwiczenia - wykonać obliczenia tak jak to zaleca się w zadaniu powyżej i wynik sprawdzić stosując wzory wprowadzone w zadaniu 1.



Rysunek 7.4. Przekroje pręta

Obliczamy odpowiednie sztywności skrętne.

Dla przekroju prostokątnego znajdujemy w/g wzoru i tablicy z podręcznika (*Wytrzymałość Materiałów*, Jakubowicz, Orłoś) lub z tablic inżynierskich:

$$\text{dla } h/b=3/2 \quad \alpha=0.346, \beta=0.294, \eta=0.859.$$

$$\text{Wskaźnik sztywności na skręcanie } J=\beta b^4=0.294D^4,$$

$$\text{Sztywność skrętna } J_{s1}=0.294 GD^4$$

$$\text{Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie } W=\alpha b^3=0.346D^3.$$

Dla przekroju cienkościennego korzystamy z wzorów Bredta. Przyjmujemy, że podane wymiary są wymiarami boków osi centralnej przekroju stąd:

$$A_0=1.5D^2,$$

$$\oint \frac{ds}{\delta} = \frac{1.5D}{2d} + \frac{D}{2d} + \frac{1.5D}{d} + \frac{D}{d} = 3.75 \frac{D}{d} = 75$$

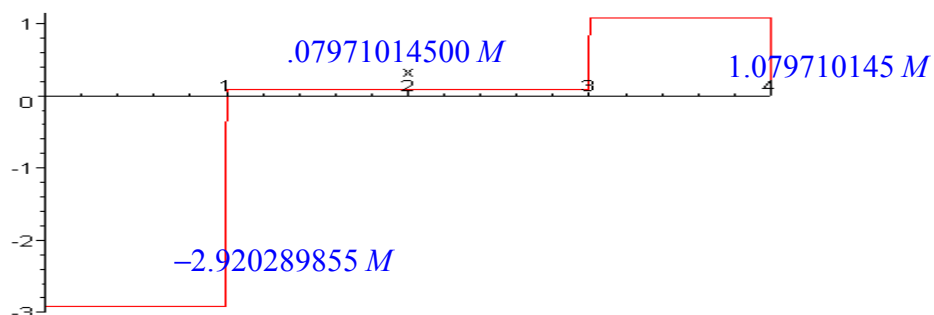
$$\text{Wskaźnik sztywności na skręcanie } J=4*(1.5D^2)^2/75=0.12 D^4,$$

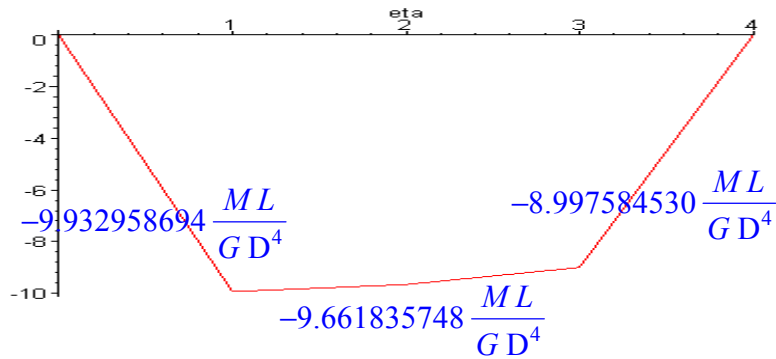
$$\text{Sztywność skrętna } J_{s2}=0.12 GD^4$$

$$\text{Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie } W=2*1.5D^2d=0.15 D^3.$$

(zauważmy, że na pierwszy przekrój zużyto 4 razy więcej materiału, uzyskując tylko niewiele ponad dwukrotnie większą sztywność i wskaźnik wytrzymałości)

Można teraz obliczyć rozkład momentów wzdłuż pręta oraz, przy okazji, - kąt skręcenia (postępując jak w zadaniu poprzednim):





Rys. 7.5. Wykres momentu skręcającego i kąta skręcenia dla zadania nr 2.

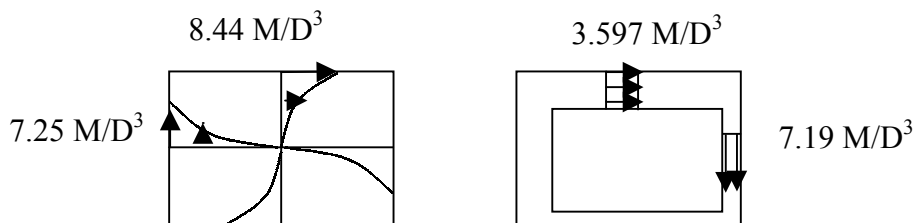
Maksymalne naprężenie dla przekroju prostokątnego:

$$\tau_{\max} = M/W = 2.92M/0.346D^3 = 8.44 M/D^3$$

$$\tau = \eta M/W = 0.859 * 2.92M/0.346D^3 = 7.25 M/D^3$$

Maksymalne naprężenie dla przekroju cienkościennego:

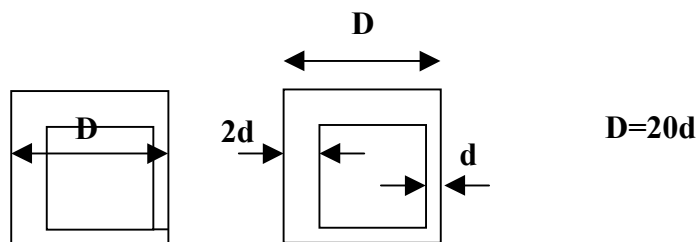
$$\tau_{\max} = M/W = 1.079M/0.15D^3 = 7.19 M/D^3$$



Rysunek 7.6. Wykresy naprężeń stycznych przy skręcaniu

Zadanie 3.

Dla pręta jak w zadaniu 1 przyjmując przekroje na odcinkach AC i CD odpowiednio: cienkościenny otwarty i cienkościenny zamknięty, tak jak to pokazano na Rysunku 7.7. Obliczyć momenty utwierdzenia w punktach A i E. Narysować wykres momentu skręcającego i wykres kąta skręcenia. Narysować wykresy naprężeń stycznych w obu przekrojach.



Rysunek 7.7. Przekroje pręta

Obliczamy odpowiednie sztywności skrętne.

Dla przekroju cienkościennego otwartego (wzory z wykładu nr 4) sztywność skrętna:

$$J = \frac{1}{3} (2Dd^3 + 2D(2d)^3) = 0.00075D^4$$

$$\text{Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie } W = 0.00075D^4/2d = 0.0075D^3.$$

Dla przekroju cienkościennego korzystamy z wzorów Bredta. Przyjmujemy, że podane wymiary są wymiarami boków osi centralnej przekroju stąd:

$$A_0 = D^2,$$

$$\oint \frac{ds}{\delta} = \frac{D}{2d} + \frac{D}{2d} + \frac{D}{d} + \frac{D}{d} = 3 \frac{D}{d} = 60$$

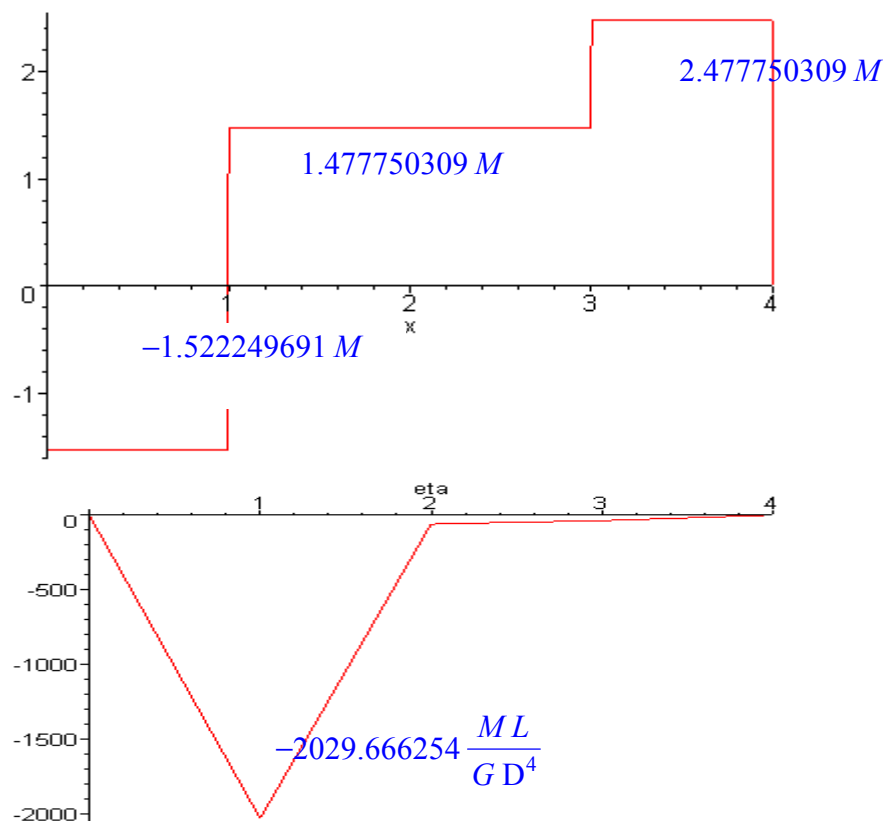
Wskaźnik sztywności na skręcanie $J = 4 \cdot (D^2)^2 / 60 = 0.0667 D^4$,

Sztywność skrętna $J_s = 0.0667 G D^4$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie $W = 2 \cdot D^2 d = 0.1 D^3$.

(zauważmy, że przekrój otwarty o geometrii podobnej jest niemal **100 razy** słabszy!)

Można teraz obliczyć rozkład momentów wzdłuż pręta oraz kąta skręcenia (postępując jak w zadaniu nr 1):



Rys. 7.5. Wykres momentu skręcającego i kąta skręcenia dla zadania nr 3.

Maksymalne naprężenie dla przekroju cienkościennego otwartego:

$$\tau_{\max} = M/W = 1.522M / 0.0075D^3 = 202.9 M/D^3$$

Występuje wzdłuż każdego z boków grubszych odcinków przekroju (o szerokości $2d$).

Maksymalne naprężenie dla przekroju cienkościennego:

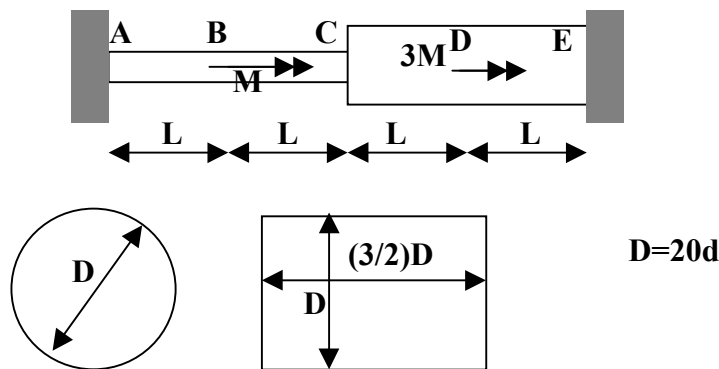
$$\tau_{\max} = M/W = 2.477 M / 0.1D^3 = 24.77 M/D^3$$

Występuje na cieńszym fragmencie przekroju, wykres jest podobny do tego z zadania nr 2.

Skrećanie sprężysto - plastyczne.

Zadanie 4.

Załóżmy, że pręt składa się z dwóch odcinków o długościach i przekrojach jak na rysunku poniżej, obciążonych momentem skrecającym, którego parametr M wzrasta do pewnej wartości $M^{\text{graniczne}}$. Wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego wzrastają też naprężenia, osiągając wartość graniczną τ^{pl} , stałą na pewnych obszarach przekroju pręta. W momencie gdy uplastyczni się cały przekrój, moment wypadkowy wynosi M^{pl} a kąt obrotu takiego przekroju względem innego - nieuplastycznionego - wzrasta nieograniczenie. W ten sposób tworzy się przegub plastyczny. Należy obliczyć wartość graniczną $M^{\text{graniczne}}$, przy której pojawi się w konstrukcji pierwszy mechanizm.



Rysunek 7.7. Pręt skrećany - dane.

Aby ocenić do jakiej wartości $M^{\text{graniczne}}$ może wzrosnąć M , przeanalizujemy kinematykę odcinków pręta pomiędzy dwoma przegubami plastycznymi. Rozpatrzmy trzy możliwe przypadki powstania mechanizmu. Są one pokazane na rysunku 7.8. Dla każdego z nich zapiszemy bilans prac, w którym uwzględnimy pracę momentów zewnętrznych na kącie obrotu odcinka pręta traktowanego jako bryła sztywna i pracę momentów plastycznych w przegubach plastycznych. Bilans ten powinien być dodatni aby umożliwić pewną dyssypację mocy w przegubach plastycznych związaną z procesem uplastycznienia materiału.

Obliczenie momentów plastycznych w przekrojach. Korzystamy z analogii wzgórza piaskowego. Moment plastyczny jest podwójną objętością równo-nachylonego do płaszczyzny stoku usypanego nad przekrojem skrećanym. Tangens kąta nachylenia jest równy danemu τ^{pl} .

Dla przekroju lewego (okrąg):

$$M_1^{\text{pl}} = \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} \tau^{\text{pl}} \frac{D}{2} = \frac{\pi}{22} \tau^{\text{pl}} D^3 = 0.1428 \tau^{\text{pl}} D^3$$

Dla przekroju prawego (prostokąt):

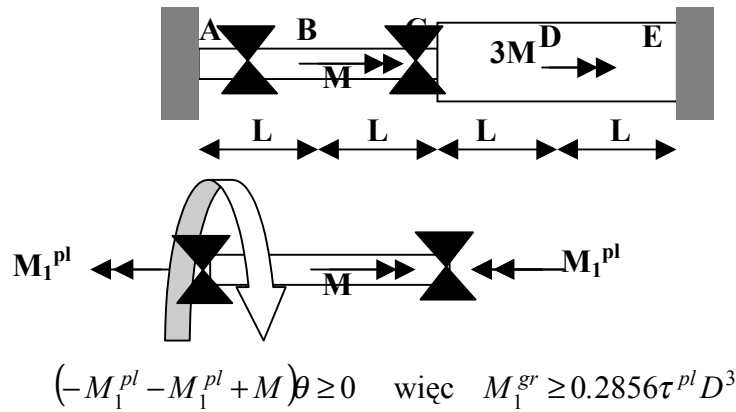
$$M_2^{\text{pl}} = \frac{1}{3} D^2 \tau^{\text{pl}} \frac{D}{2} + \frac{1}{2} \frac{D^2}{2} \tau^{\text{pl}} \frac{D}{2} = \frac{7}{24} \tau^{\text{pl}} D^3 = 0.2917 \tau^{\text{pl}} D^3$$

Rozpatrzmy teraz kinematykę trzech możliwych schematów zniszczenia:

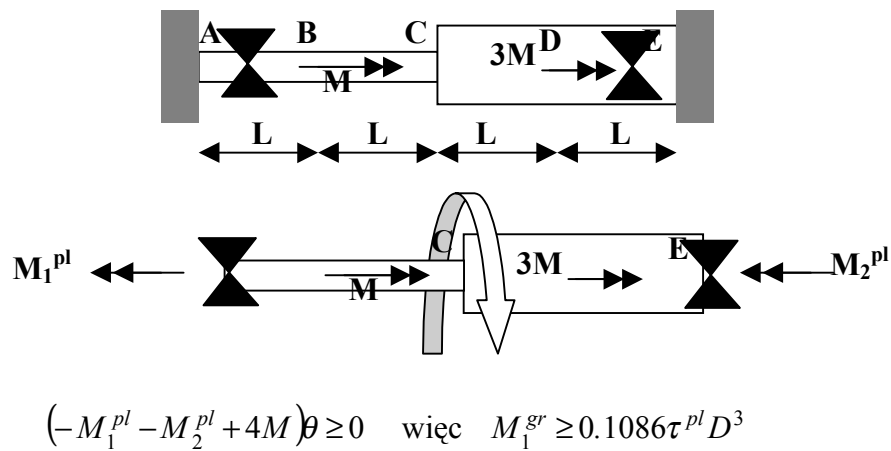


- symbol przegubu plastycznego

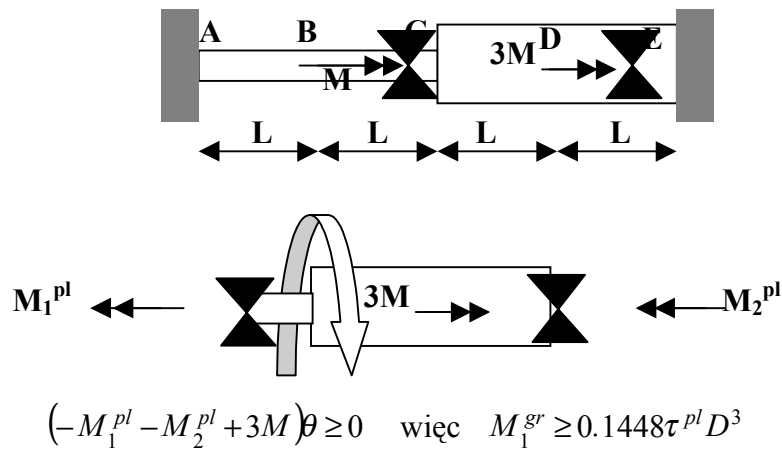
Schemat nr 1:



Schemat nr 2:



Schemat nr 3:



Rozwiązaniem jest oczywiście M minimalne:

$$M^{graniczne} = \min\{M_1^{gr}, M_2^{gr}, M_3^{gr}\} = M_2^{gr} = 0.1086\tau^{pl} D^3$$

Zauważmy, że rozpatrywanie stanu nr 3 można było łatwo wykluczyć. Na tej samej zasadzie nie wzięto pod uwagę przypadków przegubu plastycznego za punktem C w schemacie 1 i 3.