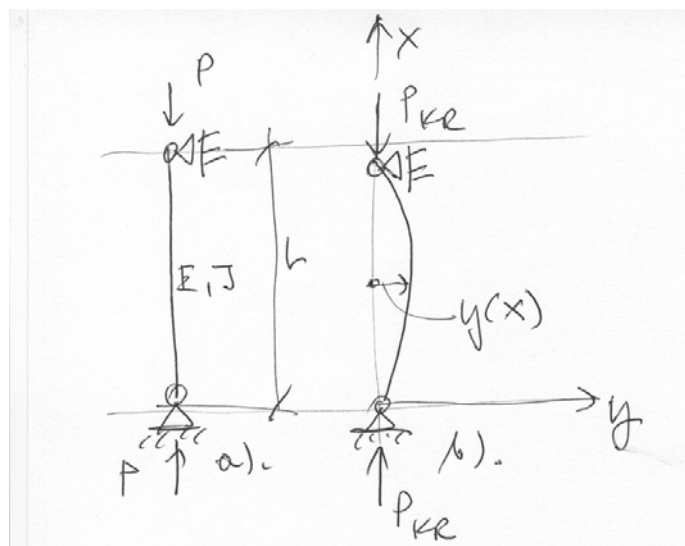


Wykład 9. Stateczność prętów. Wyboczenie sprężyste

1. Siła krytyczna dla pręta podpartego swobodnie

Dla pręta jak na rysunku 9.1 weźmiemy pod uwagę możliwość wygięcia się pręta z osi podczas ściskania. E jest modułem Younga, J momentem bezwładności przekroju względem osi z . Zapišemy Moment względem punktu o współrzędnej x na ugiętej osi belki:



Rysunek 9.1. Postać ugięta pręta przy ściskaniu.

$$M(x) = Py(x) \quad \text{ponieważ} \quad M(x) = -EJy''(x)$$

otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne: $EJy''(x) + Py(x) = 0$ przedstawiane zwykle w postaci:

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0 \quad \text{gdzie} \quad k^2 = \frac{P}{EJ} \quad (9.1)$$

z warunkami brzegowymi $y(0) = 0$ oraz $y(L) = 0$

Jego rozwiązaniem jest:

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (9.2)$$

Podstawienie warunków brzegowych do równania (9.2) prowadzi do jednorodnego układu równań na współczynniki A oraz B . $A=0, B=0$ jest rozwiązaniem trywialnym i odpowiada postaci osiowej ściskania. Warunkiem istnienia rozwiązania nietrywialnego jest zerowanie się wyznacznika macierzy przy niewiadomych:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin kL & \cos kL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin kL & \cos kL \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow$$

$$kL = n\pi$$

Dla $n=1$ otrzymuje się najmniejszą siłę, przy której postać ugięta jest możliwa. Jest to siła krytyczna Eulera:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \quad (9.3)$$

2. Inne warunki brzegowe

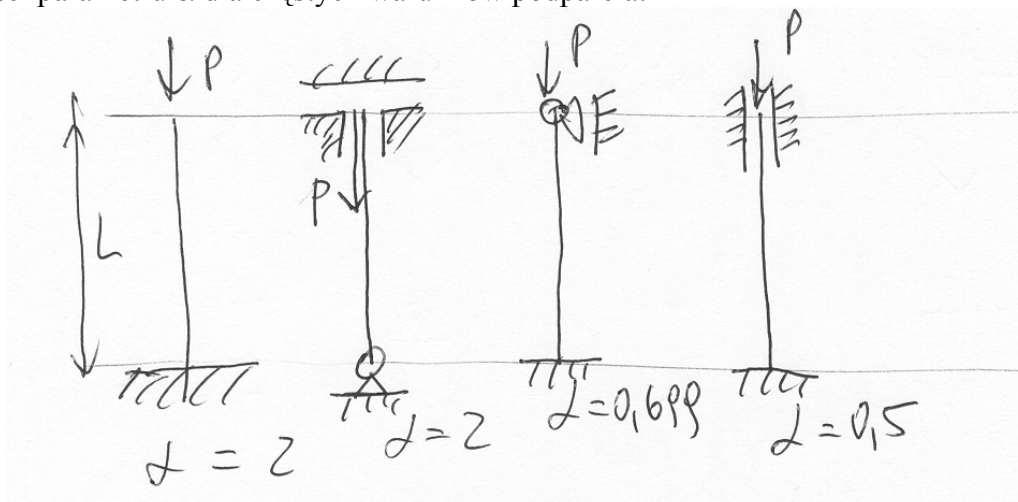
Jak łatwo zauważyć, postać linii ugięcia dla wyboczenia pojedynczego pręta pod działaniem siły pionowej skupionej na jego końcu będzie zawsze podobna do (9.2):

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx + y_{\text{szczególna}}$$

Stałe A, B oraz ewentualne inne parametry rozwiązania szczególnego zależą od warunków brzegowych. Można wykazać, że dla prostych przypadków zależność tę można sprowadzić do zastąpienia długości pręta pewną zastępczą długością zwaną długością wyboczeniową L_w .

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{L_w^2} \quad L_w = \alpha L \quad (9.4)$$

Wartości parametru α dla częstych warunków podparcia:



Rysunek 9.2. Długości wyboczeniowe.

Uwaga: Jako ćwiczenie proszę sprawdzić wartość α dla któregośkolwiek schematu!

3. Smukłość

Obliczmy naprężenie odpowiadające sile krytycznej:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{AL_w^2} = \frac{\pi^2 E}{\frac{A}{J} L_w^2} = \frac{\pi^2 E}{\frac{L_w^2}{J/A} \frac{L_w^2}{r^2}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \frac{L_w}{r} = \lambda$$

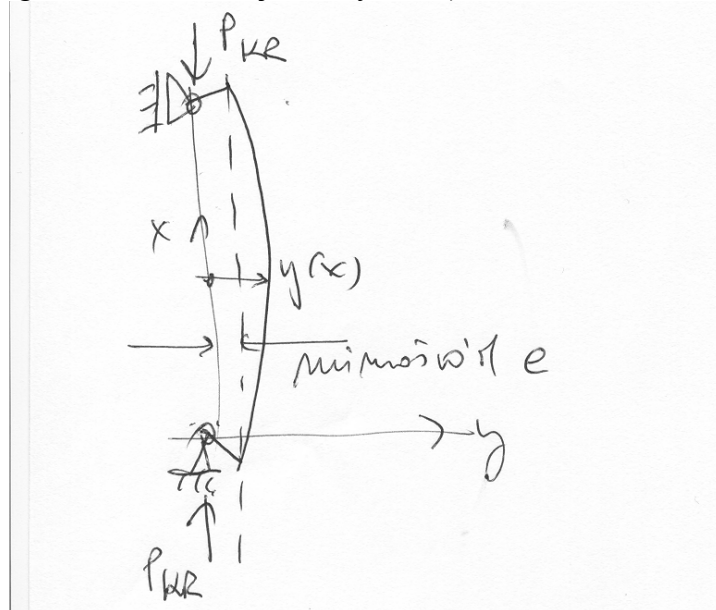
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (9.5)$$

W powyższym wzorze A jest polem przekroju zaś r jest promieniem bezwładności przekroju. Smukłość λ jest liczbą charakteryzującą pręt. Zależy ona od właściwości przekroju, długości wyboczeniowej pręta (więc od warunków podparcia) i od własności materiału pręta. Znając E dla materiału pręta oraz dopuszczalne naprężenie możemy wyznaczyć jego (dopuszczalną) właściwą smukłość. Dlatego można mówić o smukłości związanej z materiałem z jakiego wykonany jest pręt.

$$\lambda_{dop} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dop}}}$$

4. Wyboczenie z uwzględnieniem mimośrodowość siły ściskającej

Dla pręta obciążonego mimośrodowo (jak na rysunku)



Rys. 9.3 Wyboczenie przy ściskaniu mimośrodowym

otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne:

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0 \quad \text{gdzie} \quad k^2 = \frac{P}{EJ}$$

z warunkami brzegowymi $y(0) = e$ oraz $y(L) = 0$

Jego rozwiązaniem jest:

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

Podstawienie warunków brzegowych do równania (9.2) prowadzi do **niejednorodnego** układu równań na współczynniki A oraz B. Można więc wyznaczyć A oraz B:

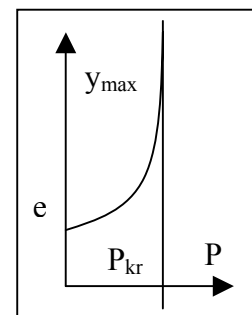
$$A = e \frac{1 - \cos kL}{\sin kL}; \quad B = e$$

rozwiązanie: $y(x) = e \left(\frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx \right)$ można zapisać w postaci:

$$y(x) = e \left(\sin \frac{kL}{2} \sin kx + \cos \frac{kL}{2} \cos kx \right) / \cos \frac{kL}{2}$$

W środku rozpiętości otrzymujemy:

$$y(L/2) = y_{\max} = \frac{e}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}} \right)}$$

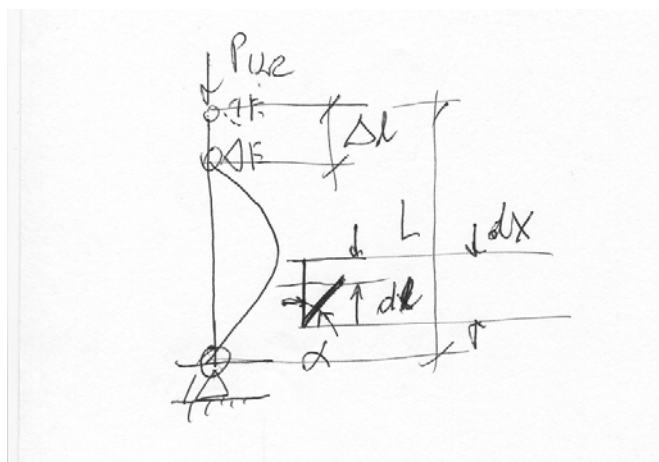


Założenie, że siła działa na mimośrodku pozwala obliczyć ugięcie, moment i naprężenia dla siły bliskiej sile krytycznej. Zauważamy, że jeśli $P \rightarrow P_{kr}$ to $y_{\max} \rightarrow$ nieskończoności.

Ćwiczenie: obliczyć naprężenia i zrobić wykres ich zależności od P w pobliżu siły krytycznej

5. Metoda energetyczna

Z porównania energii wewnętrznej pręta zginanego A i pracy siły ściskającej na przemieszczeniu końca pręta W (rysunek 9.4) wynika wzór energetyczny na obliczenie siły krytycznej.



Rys. 9.4. Oznaczenia do wzoru na siłę krytyczną obliczoną metodą energetyczną.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L M(x) \frac{1}{\rho(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^L EJ y''(x) y''(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L EJ (y''(x))^2 dx$$

$$W = P \Delta L = P \int_0^L (dx - dx \cos \alpha) = P \int_0^L (1 - \cos \alpha) dx = P \int_0^L \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha dx = \frac{1}{2} P \int_0^L (y'(x))^2 dx$$

$$P_{kr} = \frac{\int_0^L EJ (y''(x))^2 dx}{\int_0^L (y'(x))^2 dx} \quad (9.6)$$

We wzorze tym $y(x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia wybożenia, najczęściej nieznanym. Można udowodnić, że dobre przybliżenie wartości siły krytycznej można otrzymać dla funkcji $y(x)$, która jest ciągła i spełnia kinematyczne i statyczne warunki brzegowe.

Można też wykazać, że jeśli uda się zapisać wzór (9.6) dla pewnej rodziny funkcji kinematycznie dopuszczalnych V , to najlepszym przybliżeniem siły krytycznej będzie:

$$P_{kr} = \min_{v \in V} \frac{\int_0^L EJ (v''(x))^2 dx}{\int_0^L (v'(x))^2 dx}$$