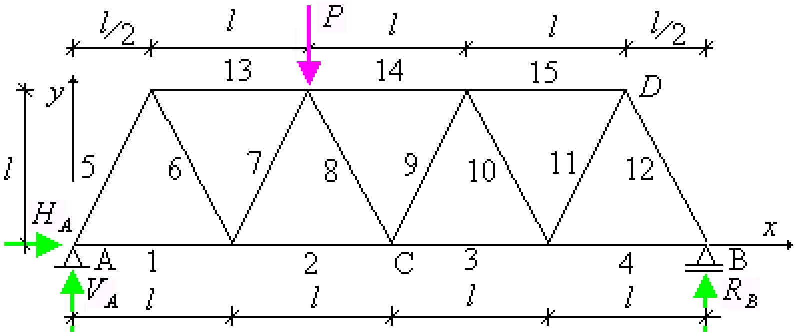
Przykład 1.1 Kratownica płaska I.

W przypadku kratownicy płaskiej obciążonej, jak na schemacie poniżej, wyznaczyć przemieszczenie pionowe v węzła C i przemieszczenie poziome u węzła D. Przyjęto stałą sztywność prętów *EA*.



Rys. 1. Schemat statyczny kratownicy

Przemieszczenia wyznaczymy stosując metodę Maxwella-Mohra, korzystając ze wzoru

$$w = \sum_{i=1}^{15} \int_0^{l_i} \frac{N_i N_i^1 ds_i}{E_i A_i} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{15} N_i N_i^1 l_i \qquad (1)$$

gdzie: w - szukane przemieszczenie,
N_i - siła normalna w i-tym pręcie kratownicy od obciążenia zewnętrznego,
N_i^1 - siła normalna w i-tym pręcie kratownicy od siły jednostkowej przyłożonej w węźle, której kierunek pokrywa się z kierunkiem poszukiwanego przemieszczenia,
l_i - długość i-tego pręta kratownicy.

I. **Wyznaczenie przemieszczenia pionowego** v **węzła C.**

1. Obliczenie reakcji i sił w prętach od obciążenia zewnętrznego.

Z warunków równowagi dla kratownicy jako całości wyznaczamy reakcje podpór

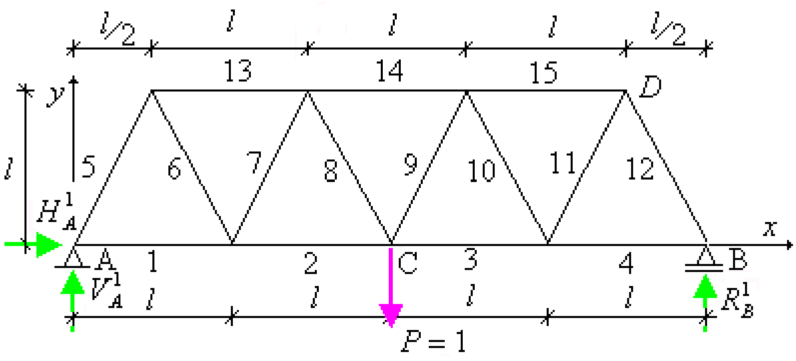
$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad -P \cdot \frac{3}{2} l + R_B \cdot 4l = 0 \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{3}{8} P$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad \rightarrow \quad V_A + R_B - P = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{5}{8} P$$

$$\sum P_{ix} = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = 0$$

Siły w prętach kratownicy wyznaczamy wykorzystując po dwa równania równowagi zapisane dla kolejnych węzłów. Wyznaczone wartości sił N_i w kratownicy od obciążenia zewnętrznego zestawiono w tablicy 1 (kolumna 3).

2. Obliczenie reakcji i sił w prętach od pionowej siły $P=1$, przyłożonej w węźle C.



Rys. 2. Schemat statyczny

Wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_A^1 = 0 \quad \rightarrow \quad -1 \cdot 2l + R_B^1 \cdot 4l = 0 \quad \rightarrow \quad R_B^1 = \frac{1}{2}$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_A^1 + R_B^1 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_A^1 = \frac{1}{2}$$

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \quad \rightarrow \quad H_A^1 = 0$$

Wyznaczone wartości sił N_i^1 w kratownicy od obciążenia jednostkowego zestawiono w tablicy 1 (kolumna 4).

Tabela 1. Zestawienie wartości sił N_i oraz N_i^1 i wyrażeń $N_i N_i^1 l_i$ oraz ich sumy.
(znak „ - ” oznacza ściskanie pręta)

Pręt	l_i [m]	N_i [N]	N_i^1	$N_i N_i^1 l_i$ [Nm]
1	1	$\frac{5}{16}P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{64}Pl$
2	1	$\frac{15}{16}P$	$\frac{3}{4}$	$\frac{45}{64}Pl$
3	1	$\frac{9}{16}P$	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{64}Pl$
4	1	$\frac{3}{16}P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{64}Pl$
5	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{5}{16}\sqrt{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{25\sqrt{5}}{128}Pl$
6	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$\frac{5}{16}\sqrt{5}P$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{25\sqrt{5}}{128}\frac{Pl}{A}$
7	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{5}{16}\sqrt{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{25\sqrt{5}}{128}Pl$

8	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{15\sqrt{5}}{128}Pl$
9	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{15\sqrt{5}}{128}Pl$
10	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{15\sqrt{5}}{128}Pl$
11	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{15\sqrt{5}}{128}Pl$
12	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{15\sqrt{5}}{128}Pl$
13	1	$-\frac{5}{8}P$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}Pl$
14	1	$-\frac{3}{4}P$	-1	$\frac{3}{4}Pl$
15	1	$-\frac{3}{8}P$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}pl$
			$\sum_{i=1}^{15} N_i N_i^1 l_i =$	$\frac{40+15\sqrt{5}}{16}Pl$

3. Obliczenie przemieszczenia pionowego v węzła C.

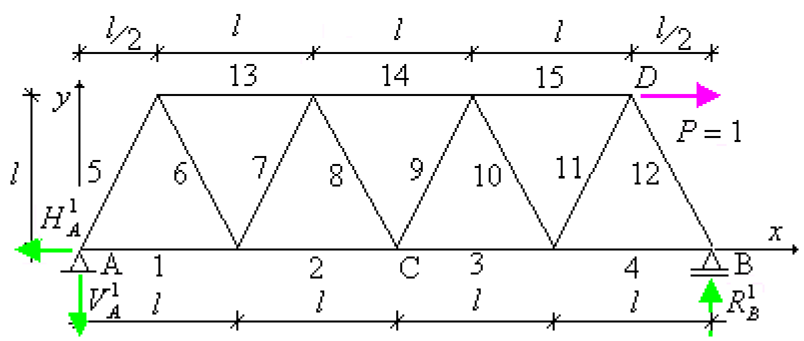
Wykorzystując wzór (1) i przeprowadzone obliczenia otrzymujemy

$$\mathrm{v} = \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{15} N_i N_i^1 l_i = \frac{40+15\sqrt{5}}{16}\cdot\frac{Pl}{EA} \cong 4{,}60\frac{Pl}{EA}$$

Otrzymany wynik końcowy ze znakiem plus oznacza, że zwrot wektora przemieszczenia jest zgodny z założonym zwrotem siły jednostkowej (Rys. 2).

II. **Wyznaczenie przemieszczenia poziomego** u **węzła D.**

1. Obliczenie reakcji i sił w prętach od poziomej siły $P = 1$, przyłożonej w węźle D.



Rys. 3. Schemat statyczny

Wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_A^1 = 0 \quad \rightarrow \quad -1 \cdot l + R_B^1 \cdot 4l = 0 \quad \rightarrow \quad R_B^1 = \frac{1}{4}$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \quad \rightarrow \quad -V_A^1 + R_B^1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_A^1 = \frac{1}{4}$$

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \quad \rightarrow \quad -H_A^1 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad H_A^1 = 1$$

Wyznaczone wartości sił N_i^1 w kratownicy od obciążenia jednostkowego zestawiono w tablicy 2 (kolumna 4). Siły w prętach od obciążenia zewnętrznego są takie same jak w tablicy 1 (kolumna 3)

Tabela 2. Zestawienie wartości sił N_i oraz N_i^1 i wyrażeń $N_i N_i^1 l_i$ oraz ich sumy.
(znak „ - ” oznacza ściskanie pręta)

Pręt	l_i [m]	N_i [N]	N_i^1	$N_i N_i^1 l_i$ [Nm]
1	1	$\frac{5}{16}P$	$\frac{7}{8}$	$\frac{35}{128}Pl$
2	1	$\frac{15}{16}P$	$\frac{5}{8}$	$\frac{75}{128}Pl$
3	1	$\frac{9}{16}P$	$\frac{3}{8}$	$\frac{27}{128}Pl$
4	1	$\frac{3}{16}P$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{128}Pl$
5	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{5}{16}\sqrt{5}P$	$\frac{\sqrt{5}}{8}$	$-\frac{25\sqrt{5}}{256}Pl$
6	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$\frac{5}{16}\sqrt{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{8}$	$-\frac{25\sqrt{5}}{256}Pl$
7	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{5}{16}\sqrt{5}P$	$\frac{\sqrt{5}}{8}$	$-\frac{25\sqrt{5}}{256}Pl$
8	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{8}$	$\frac{15\sqrt{5}}{256}Pl$
9	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$\frac{\sqrt{5}}{8}$	$\frac{15\sqrt{5}}{256}Pl$
10	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{8}$	$\frac{15\sqrt{5}}{256}Pl$
11	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$\frac{\sqrt{5}}{8}$	$\frac{15\sqrt{5}}{256}Pl$
12	$\frac{\sqrt{5}}{2}l$	$-\frac{3}{16}\sqrt{5}P$	$-\frac{\sqrt{5}}{8}$	$\frac{15\sqrt{5}}{256}Pl$
13	1	$-\frac{5}{8}P$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{32}Pl$

14	1	$-\frac{3}{4}P$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}Pl$
15	1	$-\frac{3}{8}P$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{32}Pl$
			$\sum_{i=1}^{15} N_i N_i^1 l_i =$	$\frac{9}{32}Pl$

2. <u>Obliczenie przemieszczenia poziomego u węzła D.</u>

Wykorzystując wzór (1) i przeprowadzone obliczenia otrzymujemy

$$u = \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{15} N_i N_i^1 l_i = \frac{9}{32}\cdot\frac{Pl}{EA} \cong 0{,}28\frac{Pl}{EA}$$

Otrzymany wynik końcowy ze znakiem plus oznacza, że zwrot wektora przemieszczenia jest zgodny z założonym zwrotem siły jednostkowej (Rys. 3).