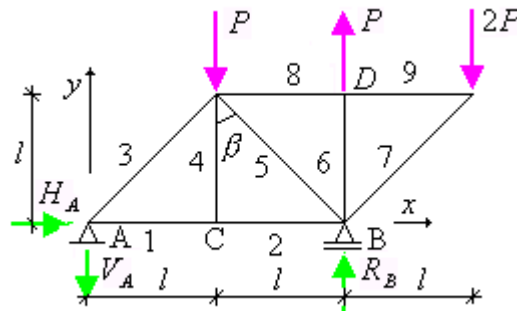


## Przykład 1.2 Kratownica płaska II.

W przypadku kratownicy płaskiej obciążonej, jak na schemacie poniżej, wyznaczyć zmianę odległości węzłów C i D oraz zmianę kąta  $\beta$ . Założono przekroje poprzeczne krzyżulców (pręty ukośne) równe  $\sqrt{2}A$  i pozostałych prętów jako  $A$ . Dla wszystkich prętów przyjęto jednakowy moduł Younga  $E$ .



Rys. 1. Schemat statyczny kratownicy

### I. Wyznaczenie zmiany odległości węzłów C i D.

Zmianę odległości węzłów C i D wyznaczymy stosując metodę Maxwella-Mohra, korzystając ze wzoru

$$\Delta l_{CD} = \sum_{i=1}^9 \int_0^{l_i} \frac{N_i N_i^1 ds_i}{E_i A_i} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^9 \frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i} \quad (1)$$

gdzie:  $\Delta l_{CD}$  - zmiana odległości węzłów C i D,

$N_i$  - siła normalna w i-tym pręcie kratownicy od obciążenia zewnętrznego,

$N_i^1$  - siła normalna w i-tym pręcie kratownicy od sił jednostkowych, przyłożonych w węzłach C i D, których kierunek pokrywa się z kierunkiem poszukiwanego

przemieszczenia,

$l_i$  - długość i-tego pręta kratownicy.

#### 1. Obliczenie reakcji i sił w prętach od obciążenia zewnętrznego.

Z warunków równowagi dla kratownicy jako całości wyznaczamy reakcje podpór

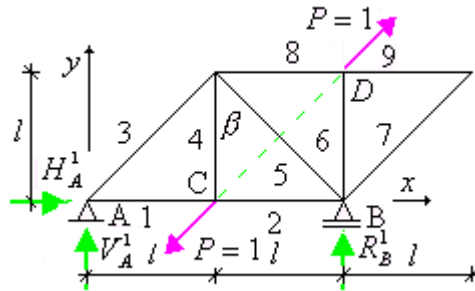
$$\sum M_A = 0 \rightarrow -P \cdot l + P \cdot 2l - 2P \cdot 3l + R_B \cdot 2l = 0 \rightarrow R_B = \frac{5}{2}P$$

$$\sum P_{iy} = 0 \rightarrow -V_A + R_B - P + P - 2P = 0 \rightarrow V_A = \frac{1}{2}P$$

$$\sum P_{ix} = 0 \rightarrow H_A = 0$$

Siły w prętach kratownicy wyznaczamy wykorzystując po dwa równania równowagi zapisane dla kolejnych węzłów. Wyznaczone wartości sił  $N_i$  w kratownicy od obciążenia zewnętrznego zestawiono w tabelicy 1 (kolumna 4).

2. Obliczenie reakcji i sił w prętach od sił jednostkowych  $P = 1$ , o kierunku prostej C-D, przyłożonych w węzłach C i D.



Rys. 2. Schemat statyczny

Wyznaczamy reakcje podpór

$$\begin{aligned} \sum M_A^1 &= 0 \rightarrow R_B^1 = 0 \\ \sum P_{iy}^1 &= 0 \rightarrow V_A^1 + R_B^1 = 0 \rightarrow V_A^1 = 0 \\ \sum P_{ix}^1 &= 0 \rightarrow H_A^1 = 0 \end{aligned}$$

Wynik jest oczywisty, gdyż przyjęty układ obciążeń jest samorzównoważony. Wyznaczone wartości sił  $N_i$  w kratownicy od obciążeń jednostkowych zestawiono w tabelicy 1 (kolumna 5).

Tabela 1. Zestawienie wartości sił  $N_i$  oraz  $N_i^1$  i wyrażen  $\frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i}$  oraz ich sumy.

(znak „-” oznacza ściskanie pręta)

Pręt	$l_i$ [m]	$A_i$ [m <sup>2</sup> ]	$N_i$ [N]	$N_i^1$ [N]	$\frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i}$ [MN/m]
1	1	$A$	$-\frac{1}{2}P$	0	0
2	1	$A$	$-\frac{1}{2}P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Pl}{A}$
3	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}A$	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$	0	0
4	1	$A$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
5	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}A$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}P$	-1	$\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{Pl}{A}$

6	1	$A$	$P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Pl}{A}$
7	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}A$	$-2\sqrt{2}P$	0	0
8	1	$A$	$2P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2} \frac{Pl}{A}$
9	1	$A$	$2P$	0	0
$\sum_{i=1}^9 \frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i} =$					$\frac{11\sqrt{2}}{4} \frac{Pl}{A}$

### 3. Obliczenie zmiany odległości węzłów C i D.

Wykorzystując wzór (1) i przeprowadzone obliczenia otrzymujemy

$$\Delta l_{CD} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^9 \frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i} = \frac{11\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{Pl}{EA} \cong 3,89 \frac{Pl}{EA}$$

Otrzymaliśmy dodatnią wartość zmiany odległości punktów C i D, co oznacza przyrost długości odcinka  $\overline{CD}$ ; zgodny z założonymi siłami jednostkowymi (Rys. 2).

## II. Wyznaczenie zmiany kąta $\beta$ .

Zmianę kąta  $\beta$  wyznaczmy stosując metodę Maxwella-Mohra, korzystając ze wzoru

$$\Delta\beta = \sum_{i=1}^9 \int_0^{l_i} \frac{N_i N_i^1 ds_i}{E_i A_i} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^9 \frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i} \quad (2)$$

gdzie:  $\Delta\beta$  - zmiana kąta  $\beta$  zawartego między prętami 4 i 5,

$N_i$  - siła normalna w i-tym pręcie kratownicy od obciążenia zewnętrznego,

$N_i^1$  - siły normalne w i-tym pręcie kratownicy od momentów jednostkowych, przyłożonych w postaci par sił do węzłów będących końcami prętów 4 i 5,

$l_i$  - długość i-tego pręta kratownicy.

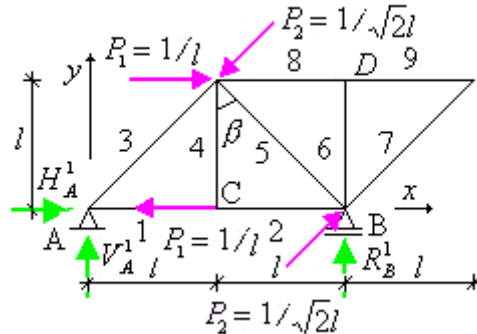
Do obliczeń wykorzystamy wielkości sił normalnych od obciążenia zewnętrznego, policzone w p. I.1 i zestawione w tabelicy 1 (kolumna 4).

### 2. Obliczenie reakcji i sił w prętach od momentów $M = 1$ , przyłożonych w postaci par sił do węzłów będących końcami prętów 4 i 5.

Momenty jednostkowe zastępujemy dwoma parami sił ( $P_1, -P_1$ ) i ( $P_2, -P_2$ ), przyłożonych do węzłów będących końcami prętów 4 i 5. Tak więc:

$$P_1 = \frac{M}{l_4} = \frac{1}{l}$$

$$P_2 = \frac{M}{l_5} = \frac{1}{\sqrt{2}l}$$



Rys. 3. Schemat statyczny

Wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_A^1 = 0 \rightarrow -\frac{1}{l} \cdot l + \frac{1}{\sqrt{2}l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2l + R_B^1 \cdot 2l = 0 \rightarrow R_B^1 = 0$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \rightarrow -V_A^1 + R_B^1 - \frac{1}{\sqrt{2}l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow V_A^1 = 0$$

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow H_A^1 + \frac{1}{l} - \frac{1}{l} + \frac{1}{\sqrt{2}l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow H_A^1 = 0$$

Wynik jest oczywisty, gdyż przyjęty układ obciążeń jest samozrównoważony. Wyznaczone wartości sił  $N_i^1$  w kratownicy od obciążenia jednostkowego zestawiono w tabelicy 2 (kolumna 5).

Tabela 2. Zestawienie wartości sił  $N_i$  oraz  $N_i^1$  i wyrażeń  $\frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i}$  oraz ich sumy.

(znak „-” oznacza ściskanie pręta)

Pręt	$l_i$ [m]	$A_i$ [m <sup>2</sup> ]	$N_i$ [N]	$N_i^1$ [N]	$\frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i}$ [MN/m]
1	$l$	$A$	$-\frac{1}{2}P$	0	0
2	$l$	$A$	$-\frac{1}{2}P$	$\frac{1}{l}$	$-\frac{P}{2A}$
3	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}A$	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$	0	0
4	$l$	$A$	0	0	0

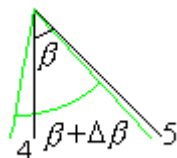
5	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}A$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}P$	$-\frac{1}{\sqrt{2}l}$	$\frac{3P}{2A}$
6	$l$	$A$	$P$	0	0
7	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}A$	$-2\sqrt{2}P$	0	0
8	$l$	$A$	$2P$	0	0
9	$l$	$A$	$2P$	0	0
$\sum_{i=1}^9 \frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i} =$					$\frac{P}{A}$

## 2. Obliczenie zmiany kąta $\beta$ .

Wykorzystując wzór (2) i przeprowadzone obliczenia otrzymujemy

$$\Delta\beta = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^9 \frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i} = \frac{P}{EA}$$

Otrzymany wynik końcowy ze znakiem plus oznacza, przyrost kąta  $\beta$  (Rys. 4).



Rys. 4. Zmiana kąta  $\beta$