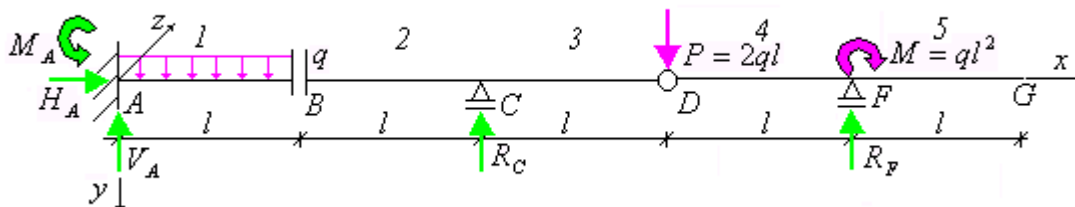


## Przykład 2.1 Belka wieloprzęslowa I.

Dla statycznie wyznaczalnej belki wieloprzęslowej o stałej sztywności  $EJ$ , obciążonej jak na rysunku poniżej, wyznaczyć ugięcie w punkcie D i kąt ugięcia w punkcie G.



Rys. 1. Schemat statyczny belki

### I. Wyznaczenie przemieszczenia pionowego v punktu D.

Przemieszczenie pionowe wyznaczmy stosując metodę Maxwella-Mohra, ze wzoru

$$v_D = \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi} M_{zi}^1 ds_i}{E_i J_{zi}} = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} M_{zi} M_{zi}^1 dx \quad (1)$$

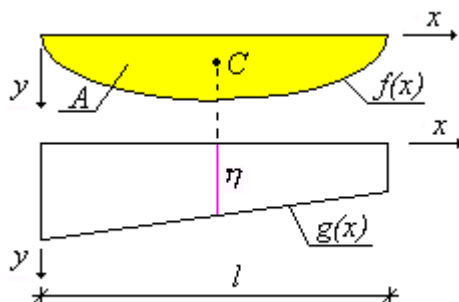
gdzie:  $v_D$  - pionowe przemieszczenie punktu D,

$M_{zi}$  - moment gnący w i-tym przedziale belki od obciążenia zewnętrznego,

$M_{zi}^1$  - moment gnący w i-tym przedziale belki od pionowej siły jednostkowej, przyłożonej w punkcie D, odpowiadającej poszukiwanemu przemieszczeniu,

$l_i$  - długość i-tego przedziału belki.

Możemy zastąpić całkowanie analityczne metodą całkowania graficznego. Objąsnił to poniżej.



Rys. 2. Wykresy funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$

Całkowanie wykonujemy korzystając ze wzoru

$$\int_0^l f(x) \cdot g(x) dx = A \cdot \eta \quad (2)$$

gdzie:  $A$  - pole wykresu nieliniowego,

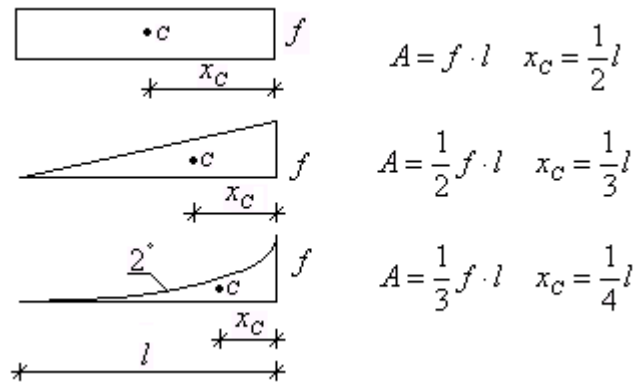
$\eta$  - rzędna wykresu liniowego dla odciętej odpowiadającej środkowi ciężkości figury pierwszego wykresu.

Uwaga: Bierzemy zawsze pole wykresu krzywoliniowego, jeżeli wykres od obciążenia zewnętrznego jest nieliniowy.

Na wstępie ustalamy znak iloczynu funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$ .

Wzór (2) jest również słuszny, gdy oba wykresy są liniowe.

Jeżeli funkcja momentu jest wielomianem, to każdy składnik wielomianu całkujemy osobno.



Rys. 3. Pola i środki ciężkości wybranych figur

Można także skorzystać wprost z odpowiednich tablic z wartościami całek.

1. Obliczenie reakcji i sporządzenie wykresu momentów gnących od obciążenia zewnętrznego.

Z warunków równowagi dla belki wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_D^{DG} = 0 \rightarrow -M + R_F \cdot l = 0 \rightarrow R_F = \frac{M}{l} = ql$$

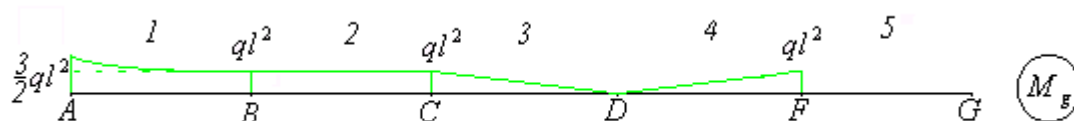
$$\sum P_{iy}^{BG} = 0 \rightarrow -R_C - R_F + P = 0 \rightarrow R_C = P - R_F = ql$$

$$\sum P_{iy}^{AB} = 0 \rightarrow -V_A + q \cdot l = 0 \rightarrow V_A = ql$$

$$\sum M_D^{AD} = 0 \rightarrow -V_A \cdot 3l + M_A - R_C \cdot l + ql \cdot \frac{5}{2}l = 0 \rightarrow M_A = 3V_A l + R_C l - \frac{5}{2}ql^2 = \frac{3}{2}ql^2$$

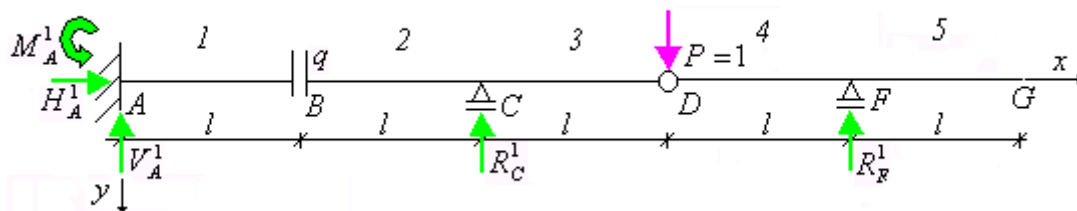
$$\sum P_{ix} = 0 \rightarrow H_A = 0$$

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego.



Rys. 4. Wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego.

2. Obliczenie reakcji i sporządzenie wykresu momentów gnących od pionowej siły jednostkowej przyłożonej w punkcie D.



Rys. 5. Schemat statyczny

Wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_D^{1DG} = 0 \rightarrow R_F^1 \cdot l = 0 \rightarrow R_F^1 = 0$$

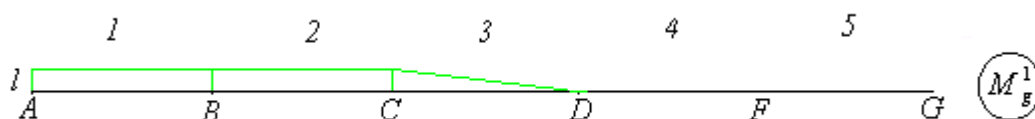
$$\sum P_{iy}^{1BG} = 0 \rightarrow -R_C^1 - R_F^1 + 1 = 0 \rightarrow R_C^1 = 1$$

$$\sum P_{iy}^{1AB} = 0 \rightarrow V_A^1 = 0$$

$$\sum M_D^{1AD} = 0 \rightarrow -V_A^1 \cdot 3l + M_A^1 - R_C^1 \cdot l = 0 \rightarrow M_A^1 = 3V_A^1 l + R_C^1 l = l$$

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow H_A^1 = 0$$

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego.

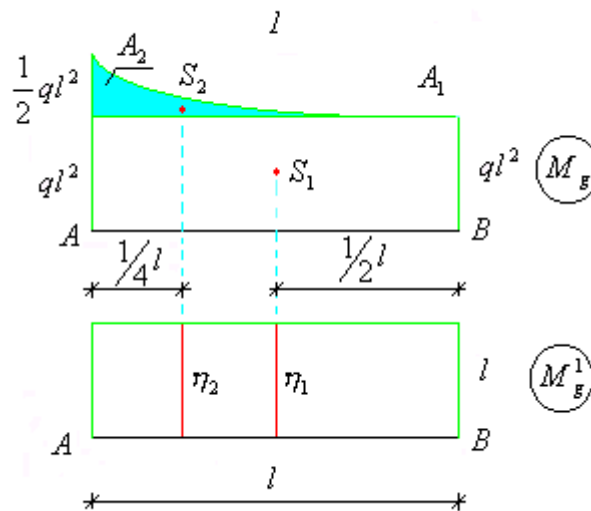


Rys. 6. Wykres momentów gnących od pionowej siły jednostkowej, przyłożonej w punkcie D

3. Obliczenie przemieszczenia pionowego  $v$  punktu D.

Zauważmy, że pole figury wykresu  $M_g$  w przedziale 1 można przedstawić jako sumę prostokąta i pola ograniczonego parabolą, dla których znamy pola powierzchni i położenie środków ciężkości. Całkę w przedziale 1 obliczymy jako sumę iloczynów pól składowych figury wykresu  $M_g$  przez rzędne w wykresie  $M_g^1$  odpowiadające środkom ciężkości w wykresie  $M_g$ . Pola powierzchni i odpowiadające im rzędne drugiego wykresu dla odciętej odpowiadającej środkowi ciężkości figury pierwszego wykresu przedstawiono poniżej (patrz rysunek 7).

$$A_1 = ql^2 \cdot l = ql^3 \quad A_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot l = \frac{1}{6} ql^3 \quad \eta_1 = \eta_2 = l$$



Rys. 7. Wykresy momentów gnących w przedziale 1

W przedziale 2 całkę obliczymy mnożąc pole figury wykresu  $M_g$  w przedziale 2 przez rzędną w wykresie  $M_g^1$  odpowiadającą środkowi ciężkości figury wykresu  $M_g$  w przedziale 2. Podobnie w przedziale 3. Łatwo dostrzec, że całki w przedziałach 4 i 5 są równe zero.

Ostatecznie wykorzystując wzór (1) i przeprowadzone obliczenia otrzymujemy

$$v_D = \frac{1}{EJ} \left( ql^2 \cdot l \cdot l + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot l + ql^2 \cdot l \cdot l + \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{5ql^4}{2EJ}$$

Otrzymany wynik końcowy ze znakiem plus oznacza, że zwrot wektora przemieszczenia jest zgodny ze zwrotem założonej siły jednostkowej (Rys. 5).

## II. Wyznaczenie kąta ugięcia w punkcie G.

Kąt ugięcia wyznaczmy stosując metodę Maxwella-Mohra, ze wzoru

$$\theta_G = \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi} M_{zi}^1 ds_i}{E_i J_{zi}} = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} M_{zi} M_{zi}^1 dx \quad (3)$$

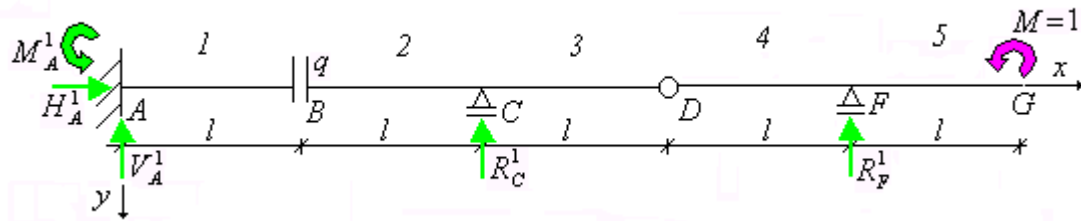
gdzie:  $\theta_G$  - kąt ugięcia w punkcie G,

$M_{zi}$  - moment gnący w i-tym przedziale belki od obciążenia zewnętrznego,

$M_{zi}^1$  - moment gnący w i-tym przedziale belki od momentu jednostkowego, odpowiadającego poszukiwanemu kątowi ugięcia, przyłożonemu w punkcie G,

$l_i$  - długość i-tego przedziału belki.

1. Obliczenie reakcji i sporządzenie wykresu momentów gnących od momentu jednostkowego, przyłożonego w węźle G.

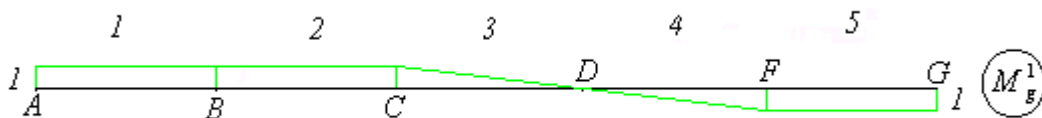


Rys. 8. Schemat statyczny

Wyznaczamy reakcje podpór

$$\begin{aligned} \sum M_D^{DG} &= 0 \rightarrow R_F^1 \cdot l + 1 = 0 \rightarrow R_F^1 = -\frac{1}{l} \\ \sum P_{iy}^{BG} &= 0 \rightarrow -R_C^1 - R_F^1 = 0 \rightarrow R_C^1 = -R_F^1 = \frac{1}{l} \\ \sum P_{iy}^{AB} &= 0 \rightarrow V_A^1 = 0 \\ \sum M_D^{AD} &= 0 \rightarrow -V_A^1 \cdot 3l + M_A - R_C^1 \cdot l = 0 \rightarrow M_A = 3V_A^1 l + R_C^1 l = 1 \\ \sum P_{ix}^1 &= 0 \rightarrow H_A^1 = 0 \end{aligned}$$

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego.



Rys. 9. Wykres momentów gnących od momentu jednostkowego, przyłożonego w węźle G.

2. Obliczenie kąta ugięcia  $\theta_G$  w punkcie G.

Ostatecznie wykorzystując wzór (3) i wyniki przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy

$$\theta_G = \frac{1}{EJ} \left( ql^2 \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot 1 + ql^2 \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{13ql^3}{6EJ}$$

Otrzymany wynik końcowy ze znakiem plus oznacza, że kąt ugięcia jest zgodny z założonym momentem jednostkowym (Rys. 8).