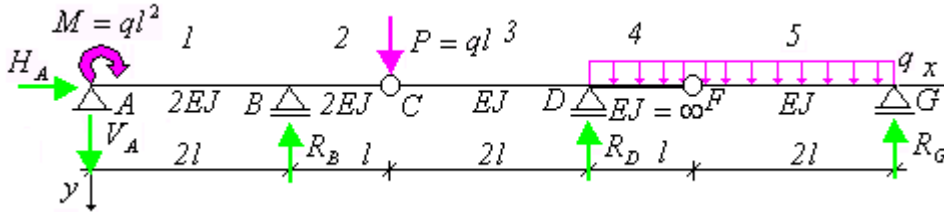


## Przykład 2.2 Belka wieloprzęsłowa II.

Dla statycznie wyznaczalnej belki wieloprzęsłowej, której sztywność zmienia się odcinkowo, wyznaczyć zmianę kąta ugięcia (kąta obrotu przekroju poprzecznego) w przegubie C i ugięcie w punkcie F.



Rys. 1. Schemat statyczny belki

### I. Wyznaczenie zmiany kąta ugięcia w przegubie C.

Zmianę kąta ugięcia wyznaczmy stosując metodę Maxwella-Mohra, korzystając ze wzoru

$$\Delta\theta_C = \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi} M_{zi}^1 ds_i}{E_i J_{zi}} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi} M_{zi}^1}{J_{zi}} dx \quad (1)$$

gdzie:  $\Delta\theta_C = \theta_C^p - \theta_C^l$  - zmiana kąta ugięcia w przegubie C,

$M_{zi}$  - moment gnący w i-tym przedziale belki od obciążenia zewnętrznego,

$M_{zi}^1$  - moment gnący w i-tym przedziale belki od momentów jednostkowych, odpowiadających poszukiwanemu przemieszczeniu, przyłożonych do prętów przedziałów 2 i 3 nieskończenie blisko przegubu C,

$l_i$  - długość i-tego przedziału belki o stałym module  $E$ .

#### 1. Obliczenie reakcji i sporządzenie wykresu momentów gnących od obciążenia zewnętrznego.

Z warunków równowagi dla belki wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_F^{FG} = 0 \rightarrow R_G \cdot 2l - q \cdot 2l \cdot l = 0 \rightarrow R_G = ql$$

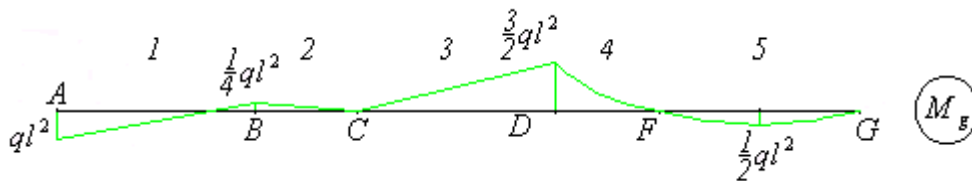
$$\sum M_C^{CG} = 0 \rightarrow R_D \cdot 2l + R_G \cdot 5l - q \cdot 3l \cdot \frac{7}{2}l = 0 \rightarrow R_D = \frac{11}{4}ql$$

$$\sum P_{ix} = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -M + R_B \cdot 2l - P \cdot 3l + R_D \cdot 5l - 3q \cdot l \cdot \frac{13}{2}l + R_G \cdot 8l = 0 \rightarrow R_B = \frac{7}{8}ql$$

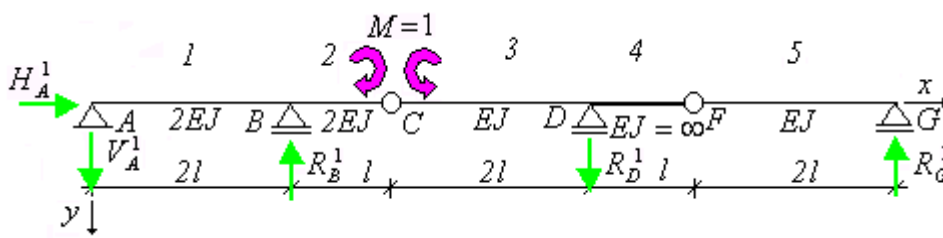
$$\sum P_{iy} = 0 \rightarrow V_A - R_B + P - R_D + 3q \cdot l - R_G = 0 \rightarrow V_A = \frac{5}{8}ql$$

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego.



Rys. 3. Wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego.

2. Obliczenie reakcji i sporządzenie wykresu momentów gnących od momentów jednostkowych, odpowiadających poszukiwanej zmianie kąta ugięcia, przyłożonych do prętów przedziałów 2 i 3 nieskończenie blisko przegubu C.



Rys. 4. Schemat statyczny

Wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_F^{1FG} = 0 \rightarrow R_G^1 \cdot l = 0 \rightarrow R_G^1 = 0$$

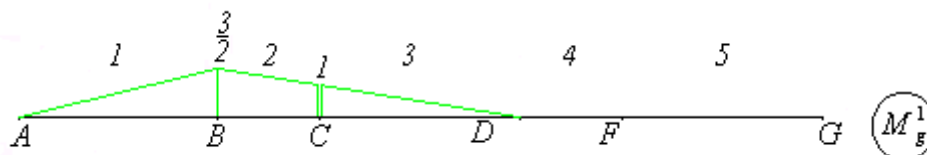
$$\sum M_C^{1CG} = 0 \rightarrow -R_D^1 \cdot 2l + R_G^1 \cdot 5l + 1 = 0 \rightarrow R_D^1 = \frac{1}{2l}$$

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow H_A^1 = 0$$

$$\sum M_A^1 = 0 \rightarrow R_B^1 \cdot 2l - 1 + 1 - R_D^1 \cdot 5l + R_G^1 \cdot l = 0 \rightarrow R_B^1 = \frac{5}{4l}$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \rightarrow V_A^1 - R_B^1 + R_D^1 - R_G^1 = 0 \rightarrow V_A^1 = \frac{3}{4l}$$

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego.

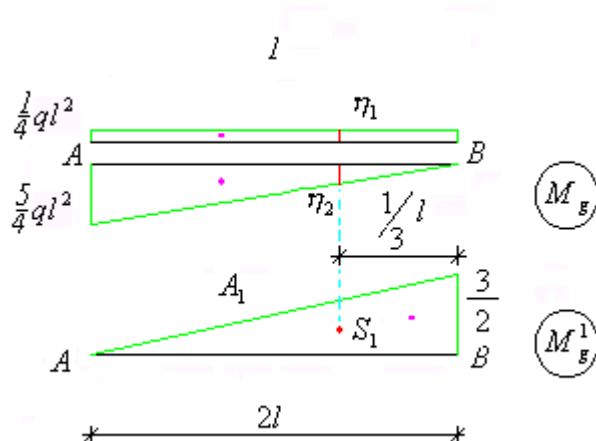


Rys. 5. Wykres momentów gnących od momentów jednostkowych, odpowiadających poszukiwanej zmianie kąta, przyłożonych do prętów przedziałów 2 i 3 nieskończenie blisko przegubu C.

### 3. Obliczenie zmiany kąta ugięcia w przegubie C.

Całkę w przedziale 1 obliczymy mnożąc pole figury wykresu  $M_g^1$  w przedziale 1 przez rzędne w wykresach  $M_g$  odpowiadające środkowi ciężkości figury wykresu  $M_g^1$  w tym przedziale. Pola powierzchni i odpowiadające im rzędne drugiego wykresu dla odciętej odpowiadającej środkowi ciężkości figury pierwszego wykresu przedstawiono poniżej (patrz rysunek 6).

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2l = \frac{3}{2}l \quad \eta_1 = \frac{1}{4}ql^2 \quad \eta_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}ql^2 = \frac{5}{12}ql^2$$



Rys. 6. Wykresy momentów gnących w przedziale 1

Podobnie w przedziale 2 i 3.

Ostatecznie wykorzystując wzór (1) i pamiętając o różnych sztywnościach belki w poszczególnych przedziałach otrzymujemy

$$\Delta\theta_C = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2J} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2l \cdot \left( \frac{1}{4}ql^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}ql^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}ql^2 \cdot l \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right\} = \frac{11}{24} \frac{ql^3}{EJ}$$

Otrzymany wynik końcowy ze znakiem plus oznacza, że zmiana kąta ugięcia w przegubie C jest zgodna z założoną (Rys. 4).

## II. Wyznaczenie przemieszczenia pionowego v punktu F.

Przemieszczenie pionowe wyznaczmy stosując metodę Maxwella-Mohra, ze wzoru

$$v_F = \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi} M_{zi}^1 ds_i}{E_i J_{zi}} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi} M_{zi}^1}{J_{zi}} dx \quad (3)$$

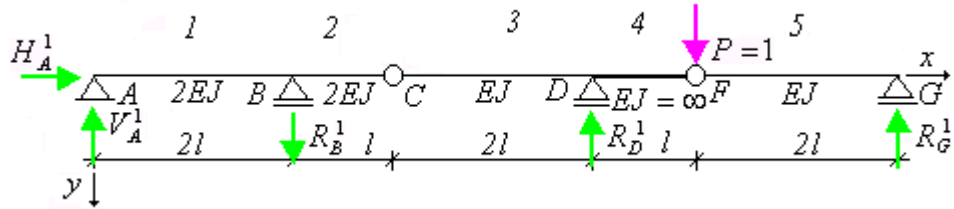
gdzie:  $v_F$  - pionowe przemieszczenie punktu F,

$M_{zi}$  - moment gnący w i-tym przedziale belki od obciążenia zewnętrznego,

$M_{zi}^1$  - moment gnący w i-tym przedziale belki od pionowej siły jednostkowej, odpowiadającej poszukiwanemu przemieszczeniu, przyłożonej w punkcie F,

$l_i$  - długość i-tego przedziału belki o stałym module  $E$ .

1. Obliczenie reakcji i sporządzenie wykresu momentów gnących od pionowej siły jednostkowej, przyłożonej w punkcie F.



Rys. 7. Schemat statyczny

Wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_F^{FG} = 0 \rightarrow R_G^1 \cdot l = 0 \rightarrow R_G^1 = 0$$

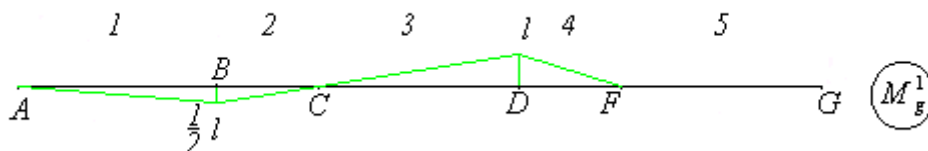
$$\sum M_C^{CG} = 0 \rightarrow R_D^1 \cdot 2l + R_G^1 \cdot 5l - 1 \cdot 3l = 0 \rightarrow R_D^1 = \frac{3}{2}$$

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow H_A^1 = 0$$

$$\sum M_A^1 = 0 \rightarrow -1 \cdot 6l - R_B^1 \cdot 2l + R_D^1 \cdot 5l + R_G^1 \cdot 8l = 0 \rightarrow R_B^1 = \frac{3}{4}$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \rightarrow -V_A^1 + R_B^1 + 1 - R_D^1 - R_G^1 = 0 \rightarrow V_A^1 = \frac{1}{4}$$

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego.



Rys. 8. Wykres momentów gnących od pionowej siły jednostkowej, przyłożonej w punkcie F.

2. Obliczenie przemieszczenia pionowego  $v_F$  punktu F.

Wartości całek w przedziale 4 (z uwagi na nieskończoną sztywność) i 5 (zerowe wykresy momentów) są równe zero. Ostatecznie wykorzystując wzór (1) i przeprowadzone obliczenia otrzymujemy

$$v_F = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2J} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot 2l \left( -\frac{1}{4} ql^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} ql^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} ql^2 \right] + \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} ql^2 \right\} = \frac{49ql^4}{48EJ}$$

Otrzymany wynik końcowy ze znakiem plus oznacza, że zwrot wektora przemieszczenia jest zgodny z założonym zwrotem siły jednostkowej (Rys. 7).