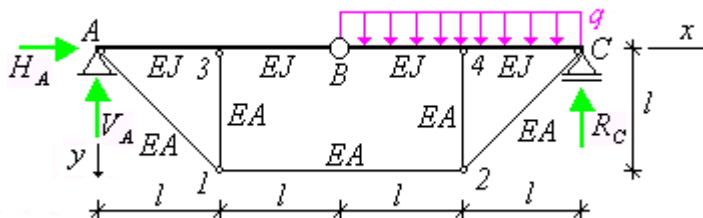


Przykład 2.3 Układ belkowo-kratowy.

Dany jest układ belkowo-kratowy, który składa się z belki o stałej sztywności EJ i części kratowej złożonej z prętów o stałej sztywności EA , obciążony jak na rysunku. Wyznaczyć przemieszczenie pionowe przegubu B belki i przemieszczenie poziome węzła 2 części kratowej. Wpływ sił normalnych w belce pominąć.



Rys.1. Schemat statyczny układu złożonego

Przemieszczenia wyznaczymy stosując metodę Maxwella-Mohra, korzystając ze wzoru

$$w = \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} \frac{M_{zi} M_{zi}^1 ds_i}{E_i J_{zi}} + \sum_{i=1}^5 \int_0^{l_i} \frac{N_i N_i^1 ds_i}{E_i A_i} = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} M_{zi} M_{zi}^1 dx + \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^5 N_i N_i^1 l_i \quad (1)$$

- gdzie: w - przemieszczenie dowolnego węzła kratownicy lub punktu belki,
 N_i - siła normalna w i-tym pręcie kratownicy od obciążenia zewnętrznego,
 N_i^1 - siła normalna w i-tym pręcie kratownicy od siły jednostkowej przyłożonej w węźle kratownicy lub punkcie belki, której kierunek pokrywa się z kierunkiem poszukiwanego przemieszczenia,
 M_{zi} - moment gnący w i-tym przedziale belki od obciążenia zewnętrznego,
 M_{zi}^1 - moment gnący w i-tym przedziale belki od siły jednostkowej przyłożonej w węźle kratownicy lub przekroju belki, której kierunek pokrywa się z kierunkiem poszukiwanego przemieszczenia,
 l_i - długość i-tego pręta kratownicy lub przedziału belki.

I. Wyznaczenie przemieszczenia pionowego v przegubu B belki.

1. Obliczenie reakcji, sił normalnych w prętach i sporządzenie wykresu momentów gnących od obciążenia zewnętrznego.

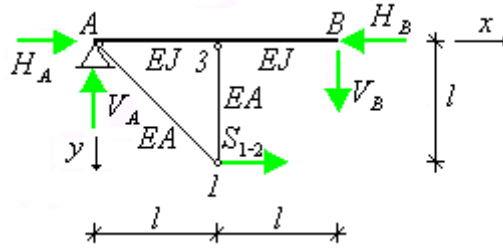
Z warunków równowagi dla układu złożonego wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_C = 0 \rightarrow -V_A \cdot 2l + q \cdot 2l \cdot l = 0 \rightarrow V_A = \frac{1}{2} ql$$

$$\sum P_{iy} = 0 \rightarrow -V_A - R_C + q \cdot 2l = 0 \rightarrow R_C = \frac{3}{2} ql$$

$$\sum P_{ix} = 0 \rightarrow H_A = 0$$

W celu wyznaczenia siły przecię 1-2 części kratowej układu dzielimy układ belkowo-kratowy na 2 części, dokonując przecięcia przez przegub B i pręt 1-2.



Rys. 2. Schemat statyczny lewej części układu belkowo-kratowego

Z warunku równowagi dla tej części otrzymujemy

$$\sum M_B^l = 0 \rightarrow -V_A \cdot 2l + S_{1-2} \cdot l = 0 \rightarrow S_{1-2} = 2V_A = ql$$

Z warunków równowagi węzła 1 wyznaczamy siły w prętach 1-A i 1-3

$$\sum P_{ix} = 0 \rightarrow S_{1-2} - S_{1-A} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow S_{1-A} = \sqrt{2}ql$$

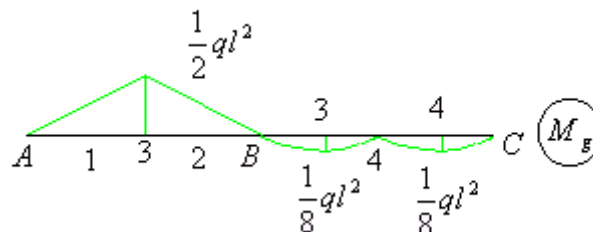
$$\sum P_{iy} = 0 \rightarrow -S_{1-3} - S_{1-A} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow S_{1-3} = -ql$$

Z uwagi na symetrię części kratowej układu siły w prętach 2-C i 2-4 są odpowiednio równe siłom w prętach 1-A i 1-3

$$S_{2-C} = S_{1-A} = \sqrt{2}ql \quad S_{1-3} = S_{2-4} = -ql$$

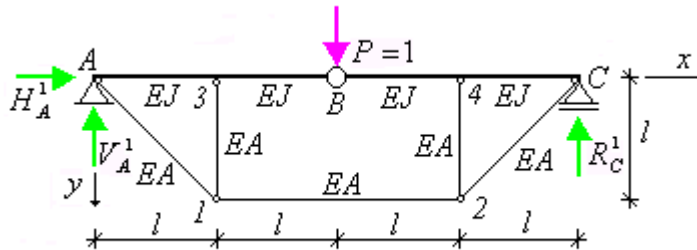
Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 1 (kolumna 3).

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego.



Rys. 3. Wykres momentów gnących (belka) od obciążenia zewnętrznego.

2. Obliczenie reakcji, sił normalnych w prętach i sporządzenie wykresu momentów gnących od siły jednostkowej przyłożonej w przegubie B, której kierunek pokrywa się z kierunkiem poszukiwanego przemieszczenia.



Rys.4. Schemat statyczny

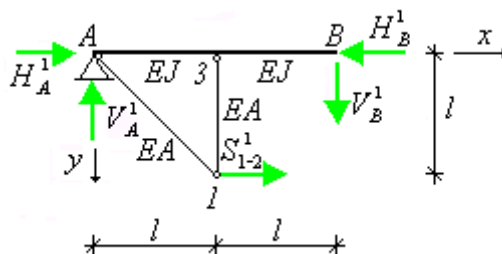
Z warunków równowagi dla układu złożonego wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum M_C^1 = 0 \rightarrow -V_A^1 \cdot 2l + 1 \cdot 2l = 0 \rightarrow V_A^1 = \frac{1}{2}$$

$$\sum P_{by}^1 = 0 \rightarrow -V_A^1 - R_C^1 + 1 = 0 \rightarrow R_C^1 = \frac{1}{2}$$

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow H_A^1 = 0$$

W celu wyznaczenia siły przecię 1-2 części kratowej dzielimy układ belkowo-kratowy na 2 części, dokonując przecięcia przez przegub B i pręt 1-2.



Rys. 5. Schemat statyczny lewej części układu belkowo-kratowego

$$\sum M_B^{II} = 0 \rightarrow -V_A^1 \cdot 2l + S_{1-2}^1 \cdot l = 0 \rightarrow S_{1-2}^1 = 2V_A^1 = 1$$

Z warunków równowagi węzła 1 wyznaczamy siły w prętach 1-A i 1-3

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow S_{1-2}^1 - S_{1-A}^1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow S_{1-A}^1 = \sqrt{2}$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \rightarrow -S_{1-3}^1 - S_{1-A}^1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow S_{1-3}^1 = -1$$

Z uwagi na symetrię części kratowej układu siły w prętach 2-B i 2-4 są odpowiednio równe siłom w prętach 1-A i 1-3

$$S_{2-C}^1 = S_{1-A}^1 = \sqrt{2} \quad S_{1-3}^1 = S_{2-4}^1 = -1$$

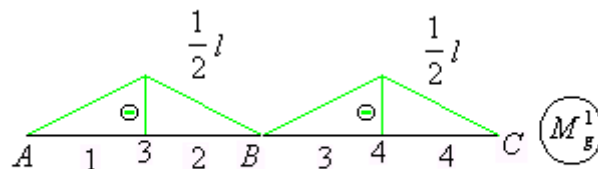
Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 1 (kolumna 4).

Tabela 1. Zestawienie wartości sił N_i oraz N_i^1 i wyrażeń $\frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i}$ oraz ich sumy.

(znak „-” oznacza ściskanie pręta)

Pręt	l_i [m]	N_i [N]	N_i^1 [N]	$N_i N_i^1 l_i$ [MN/m]
1-A	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}ql$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}ql^2$
1-3	l	$-ql$	-1	ql^2
1-2	$2l$	ql	1	$2ql^2$
2-4	l	$-ql$	-1	ql^2
2-C	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}ql$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}ql^2$
$\sum_{i=1}^5 N_i N_i^1 l_i =$				$4(\sqrt{2} + 1)ql^2$

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego.



Rys. 6. Wykres momentów gnących (belka) od obciążenia zewnętrznego.

3. Obliczenie przemieszczenia pionowego v przegubu B belki.

Wykorzystując wzór (1) i przeprowadzone obliczenia otrzymujemy

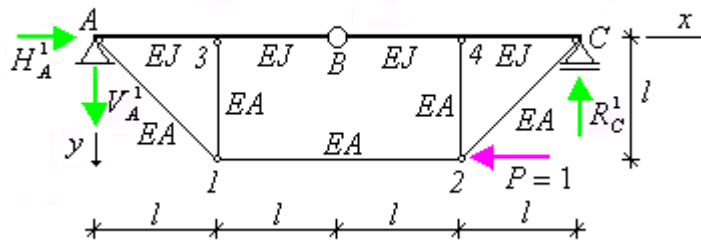
$$v_B = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} M_{zi} M_{zi}^1 dx + \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^5 N_i N_i^1 l_i =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left(2 \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \right) + \frac{1}{EA} 2(\sqrt{2} + 2)ql^2 = \frac{ql^4}{8EJ} + \frac{4(\sqrt{2} + 1)ql^2}{EA}$$

Całki policzono metodą całkowania graficznego. Otrzymany wynik końcowy ze znakiem plus oznacza, że zwrot wektora przemieszczenia jest zgodny z założonym zwrotem siły jednostkowej (Rys. 4).

II. Wyznaczenie przemieszczenia poziomego węzła 2.

1. Obliczenie reakcji, sił normalnych w prętach i sporządzenie wykresu momentów gnących od siły jednostkowej, odpowiadającej poszukiwanemu przemieszczeniu, przyłożonej do węzła 2.



Rys. 7. Schemat statyczny

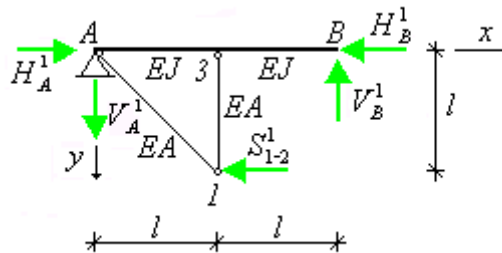
Z warunków równowagi dla układu złożonego wyznaczamy reakcje podpór

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow H_A^1 - 1 = 0 \rightarrow H_A^1 = 1$$

$$\sum M_A^1 = 0 \rightarrow R_B^1 \cdot 4l - 1 \cdot l = 0 \rightarrow R_B^1 = \frac{1}{4}$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \rightarrow V_A^1 - R_C^1 = 0 \rightarrow V_A^1 = \frac{1}{4}$$

W celu wyznaczenia siły przecię 1-2 kratowej dzielimy układ belkowo-kratowy na 2 części, dokonując przecięcia przez przegub B i pręt 1-2.



Rys. 8. Schemat statyczny lewej części układu złożonego

$$\sum M_B^1 = 0 \rightarrow V_A^1 \cdot 2l - S_{1-2}^1 \cdot l = 0 \rightarrow S_{1-2}^1 = 2V_A^1 = \frac{1}{2}$$

Z warunków równowagi węzła 1 wyznaczamy siły w prętach 1-A i 1-3

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow -S_{1-2}^1 - S_{1-A}^1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow S_{1-A}^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \rightarrow -S_{1-3}^1 + S_{1-A}^1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow S_{1-3}^1 = \frac{1}{2}$$

Z warunków równowagi węzła 2 wyznaczamy siły w prętach 2-C i 2-4

$$\sum P_{ix}^1 = 0 \rightarrow S_{1-2}^1 - 1 + S_{2-C}^1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow S_{2-C}^1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sum P_{iy}^1 = 0 \rightarrow -S_{2-4}^1 - S_{2-C}^1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow S_{2-4}^1 = -\frac{1}{2}$$

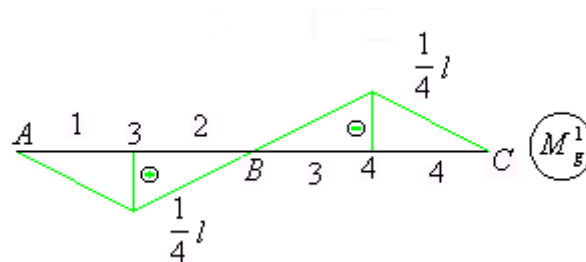
Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 2 (kolumna 4).

Tabela 2. Zestawienie wartości sił N_i oraz N_i^1 i wyrażeń $\frac{N_i N_i^1 l_i}{A_i}$ oraz ich sumy.

(znak „-” oznacza ściskanie pręta)

Pręt	l_i [m]	N_i [N]	N_i^1 [N]	$N_i N_i^1 l_i$ [MN/m]
1-A	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}ql$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}ql^2$
1-3	l	$-ql$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}ql^2$
1-2	$2l$	ql	$-\frac{1}{2}$	$-ql^2$
2-4	l	$-ql$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}ql^2$
2-C	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}ql$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{2}ql^2$
$\sum_{i=1}^5 N_i N_i^1 l_i =$				$-ql^2$

Wykorzystując przeprowadzone obliczenia sporządzamy wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego.



Rys. 9. Wykres momentów gnących (belka) od obciążenia zewnętrznego.

3. Obliczenie przemieszczenia poziomego u węzła 2 kratownicy.

Wykorzystując wzór (1) i przeprowadzone obliczenia otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} M_{zi} M_{zi}^1 dx + \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^5 N_i N_i^1 l_i = \\
 &= \frac{1}{EJ} \left(-2 \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} l - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} l \right) - \frac{1}{EA} ql^2 = -\frac{5ql^4}{48EJ} - \frac{ql^2}{EA}
 \end{aligned}$$

Całki policzono metodą całkowania graficznego. Otrzymany wynik końcowy ze znakiem minus oznacza, że zwrot wektora przemieszczenia jest przeciwny do założonego zwrotu siły jednostkowej (Rys. 7).