Wprowadzenie

Konstrukcja pod wpływem obciążenia odkształca się, a jej punkty doznają przemieszczeń liniowych i kątowych. Umiejętność wyznaczania tych przemieszczeń jest konieczna przy sprawdzaniu warunku sztywności (przemieszczenia nie mogą przekraczać wartości dopuszczalnych, określonych w normie stosownej do rodzaju konstrukcji). Przyjmijmy założenie, że rozważamy płaski układ prętowy, a więc osie wszystkich prętów układu leżą w jednej płaszczyźnie. W płaszczyźnie tej znajduje się ponadto jedna z głównych centralnych osi bezwładności każdego przekroju poprzecznego pręta oraz linie działania sił obciążających układ. Oznacza to, że konstrukcja zginana jest w swojej płaszczyźnie. Załóżmy również, że układ wykonany jest z materiału liniowo-sprężystego, a rzeczywiste przemieszczenia są bardzo małe w porównaniu z wymiarami konstrukcji.

Do wyznaczania przemieszczeń można zastosować zasadę pracy wirtualnej dla układów prętowych, zgodnie z którą praca obciążeń wirtualnych na rzeczywistych przemieszczeniach jest równa pracy wirtualnych sił przekrojowych na rzeczywistych odkształceniach:

$$\sum \overline{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{\delta} = \int_s \left(\frac{\overline{M}\, M}{EI} + \frac{\overline{N}\, N}{EA} + \kappa \frac{\overline{T}\, T}{GA} \right) ds$$

gdzie

$\overline{\boldsymbol{P}}$ - obciążenie wirtualne,

$\boldsymbol{\delta}$ - rzeczywiste przemieszczenie w punkcie przyłożenia siły $\overline{\boldsymbol{P}}$,

$\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{T}$ - siły przekrojowe odpowiadające obciążeniu wirtualnemu,

M, N, T - siły przekrojowe odpowiadające obciążeniu rzeczywistemu,

EI - sztywność zginania pręta,

EA - sztywność ściskania pręta,

GA - sztywność ścinania pręta,

κ - współczynnik zależny od kształtu przekroju poprzecznego pręta.

Przyjmijmy, że w wybranym punkcie układu poszukujemy przemieszczenia uogólnionego (liniowego bądź kątowego) δ. W punkcie tym przykładamy obciążenie wirtualne w postaci jednostkowej siły uogólnionej $\overline{P} = \overline{1}$ (siły bądź momentu stosownie do poszukiwanego przemieszczenia), o kierunku poszukiwanego przemieszczenia. Po podstawieniu otrzymamy

$$\overline{1} \cdot \delta = \int_s \left(\frac{\overline{M}\, M}{EI} + \frac{\overline{N}\, N}{EA} + \kappa \frac{\overline{T}\, T}{GA} \right) ds$$

lub

$$\delta = \int_s \left(\frac{\overline{M}\, M}{EI} + \frac{\overline{N}\, N}{EA} + \kappa \frac{\overline{T}\, T}{GA} \right) ds$$

Zapis ten przedstawia wzór <u>Maxwella-Mohra</u>. W konstrukcjach złożonych z prętów wiotkich (stosunek wysokości przekroju poprzecznego pręta do jego długości $\frac{h}{l} \le \frac{1}{10}$), wpływ sił poprzecznych na wielkość przemieszczeń jest pomijalny. Wzór upraszcza się do postaci

$$\delta = \int_s \left(\frac{\overline{M}\, M}{EI} + \frac{\overline{N}\, N}{EA} \right) ds \,.$$

Z powyższego wzoru korzystamy gdy konstrukcja składa się z prętów zginanych oraz z prętów dwuprzegubowych, w których nie działają momenty gnące i siły poprzeczne (rama ze ściągiem, rama ze skratowaniem). Wpływ sił podłużnych działających w prętach zginanych na wielkość przemieszczeń jako mały można pominąć. Jeżeli w układzie ramowym nie występują pręty dwuprzegubowe, nieobciążone prostopadle do swojej osi, to obliczając przemieszczenia uwzględniamy tylko pierwszy składnik w wyrażeniu podcałkowym.

$$\delta = \int_s \frac{\overline{M}\,M}{EI}\,ds$$

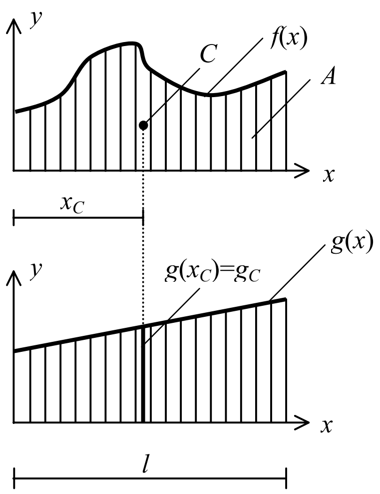
Dla prętów o stałej lub przedziałami stałej sztywności zginania mianownik wyrażenia podcałkowego przeniesiemy przed całkę

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_s \overline{M}\,M\,ds$$

lub

$$\delta = \sum \frac{1}{EI}\int_s \overline{M}\,M\,ds\,.$$

W takim przypadku można uprościć wyznaczenie przemieszczenia zastępując całkowanie analityczne obliczeniami z wykorzystaniem wzoru Wereszczagina.



funkcja $f(x)$ - dowolna funkcja (np. funkcja o wykresie krzywoliniowym, funkcja nieciągła w skończonej liczbie punktów)

funkcja $g(x)$ - funkcja liniowa

A - pole figury pod wykresem funkcji $f(x)$ w przedziale od 0 do l

C - środek ciężkości figury pod wykresem funkcji $f(x)$ w przedziale od 0 do l

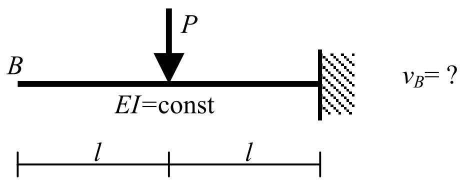
x_C - odcięta środka ciężkości figury pod wykresem funkcji $f(x)$ w przedziale od 0 do l

$g(x_C)= g_C$ - rzędna funkcji g(x) dla odciętej x_C

Wzór Wereszczagina ma postać:

$$\int_0^l f(x)\cdot g(x)dx = A\cdot g_C$$

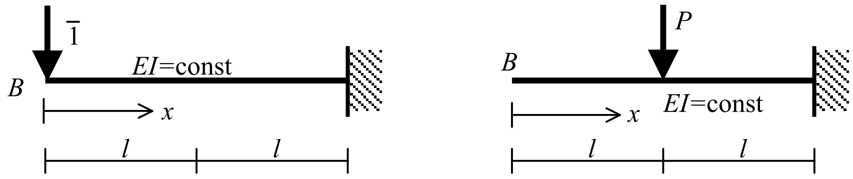
Przykład
Wyznaczyć składową pionową przemieszczenia punktu B w poniższym układzie.



Zadanie rozwiążemy korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_s \overline{M}\,M\,ds$$

obliczając wartość całki analitycznie. Układ należy obciążyć siłą jednostkową, przyłożoną w punkcie B i mającą kierunek pionowy.



W pierwszym przedziale ($0 \leq x \leq l$) funkcja momentu gnącego od obciążenia jednostkowego jest następująca: $\overline{M}(x) = -\overline{1} \cdot x = -x$, natomiast funkcja momentu gnącego od obciążenia rzeczywistego ma postać: $M(x) = 0$.

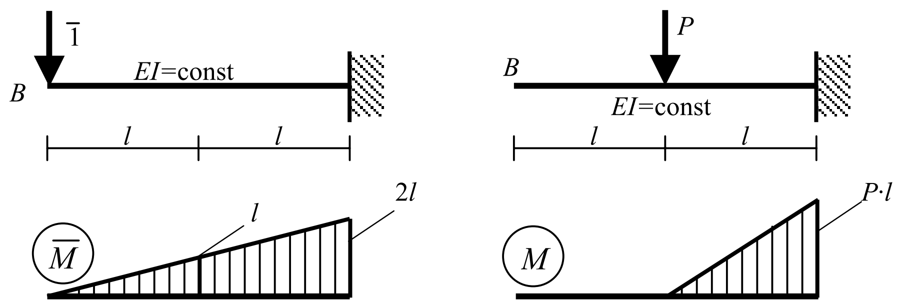
W drugim przedziale ($l \leq x \leq 2l$) funkcja momentu gnącego od obciążenia jednostkowego jest taka jak w pierwszym przedziale, czyli: $\overline{M}(x) = -\overline{1} \cdot x = -x$, natomiast funkcja momentu gnącego od obciążenia rzeczywistego ma postać: $M(x) = -P \cdot (x - l)$.

$$v_B = \frac{1}{EI}\int_0^{2l} \overline{M}\, M\, dx = \frac{1}{EI}\int_0^{l} (-x) \cdot 0\, dx + \frac{1}{EI}\int_l^{2l} (-x) \cdot [-P \cdot (x - l)]\, dx = 0 + \frac{P}{EI}\int_l^{2l} (x^2 - l \cdot x) dx =$$

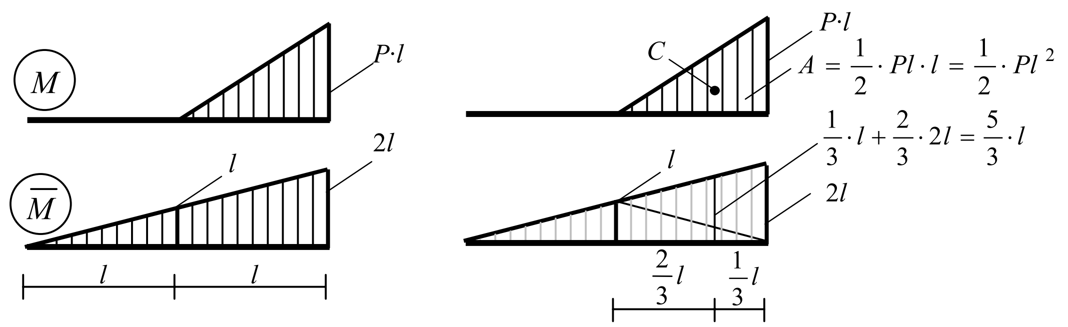
$$= \frac{P}{EI}\left(\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot l \cdot x^2\right)\Bigg|_l^{2l} = \frac{P}{EI}\left[\frac{1}{3} \cdot (2l)^3 - \frac{1}{2} \cdot l \cdot (2l)^2 - \frac{1}{3} \cdot l^3 + \frac{1}{2} \cdot l^3\right] = \frac{P \cdot l^3}{EI}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{P \cdot l^3}{EI} \cdot \frac{16 - 12 - 2 + 3}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{P \cdot l^3}{EI}$$

To samo zadanie można rozwiązać korzystając ze wzoru Wereszczagina. W tym celu należy sporządzić wykresy momentów gnących zarówno od obciążenia jednostkowego, jak i obciążenia rzeczywistego.



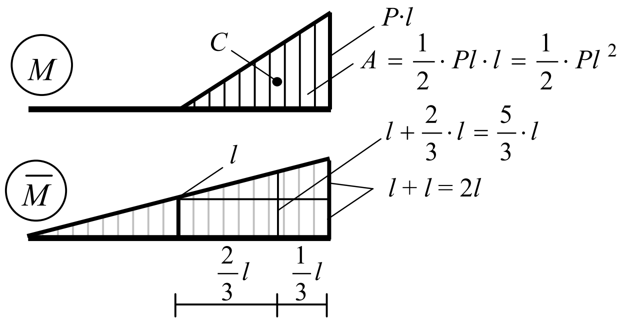
Oba wykresy są liniowe, a więc warunek, żeby jedna z funkcji w wyrażeniu podcałkowym była liniowa jest spełniony.



Korzystając ze wzoru Wereszczagina otrzymujemy

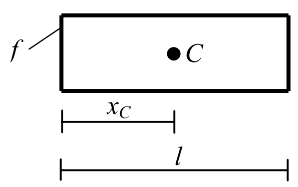
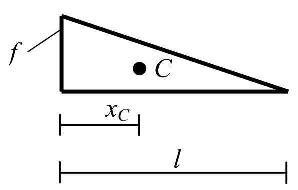
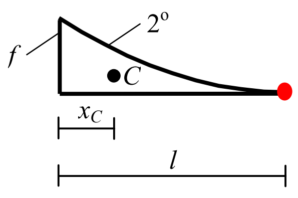
$$v_B = \frac{1}{EI}\int_0^{2l} \overline{M}M\,dx = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}Pl^2\cdot\frac{5}{3}l = \frac{5}{6}\cdot\frac{Pl^3}{EI}$$

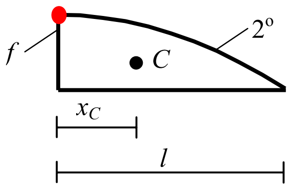
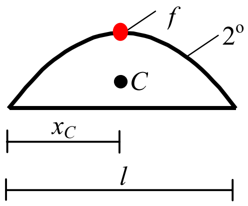
Wyznaczenie przemieszczenia drugim sposobem jest prostsze pod względem rachunkowym. Podział trapezu w drugim przedziale wykresu momentów $\overline{M}$ od obciążenia jednostkowego na dwa trójkąty nie jest jedynym możliwym podziałem. Wykres w postaci trapezu możemy przedstawić jako sumę prostokąta i trójkąta.



Wartość obliczonego przemieszczenia jest dodatnia. Oznacza to, że składowa pionowa przemieszczenia w punkcie B ma zwrot zgodny ze zwrotem siły jednostkowej $\overline{P} = \overline{1}$, czyli punkt B w kierunku pionowym przemieszcza się do dołu.

Umiejętność wyznaczania pola powierzchni i odciętej środka ciężkości figur płaskich, takich jak prostokąt, trójkąt i parabola, jest nieodzowna przy stosowaniu sposobu Wereszczagina do wyznaczania wartości całek.

Figura	Pole powierzchni figury	Odcięta środka ciężkości figury
	$A = l\cdot f$	$x_C = \frac{1}{2}\cdot l$
	$A = \frac{1}{2}\cdot l\cdot f$	$x_C = \frac{1}{3}\cdot l$
	$A = \frac{1}{3}\cdot l\cdot f$	$x_C = \frac{1}{4}\cdot l$

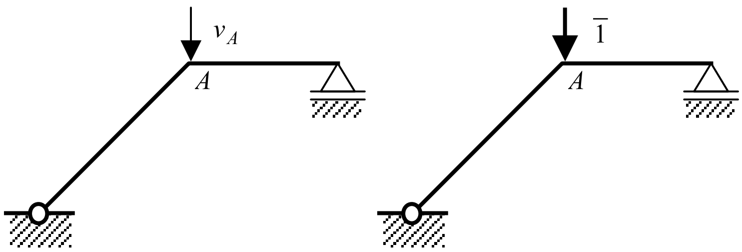
	$A = \frac{2}{3} \cdot l \cdot f$	$x_C = \frac{3}{8} \cdot l$
	$A = \frac{2}{3} \cdot l \cdot f$	$x_C = \frac{1}{2} \cdot l$

Uwaga: w powyższej tabeli miejsce występowania ekstremum paraboli oznaczone zostało czerwonym kolorem.

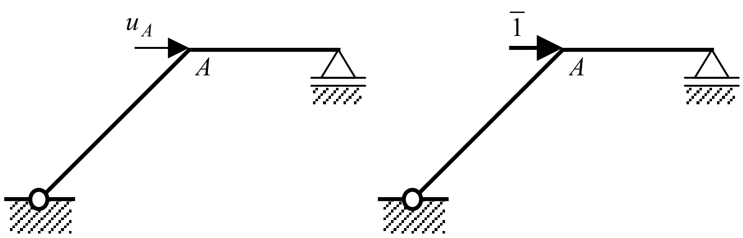
Przy wyznaczaniu przemieszczeń uogólnionych ważna jest też umiejętność doboru obciążenia jednostkowego, co ilustrują poniższe rysunki.

<u>Przemieszczenia liniowe</u>

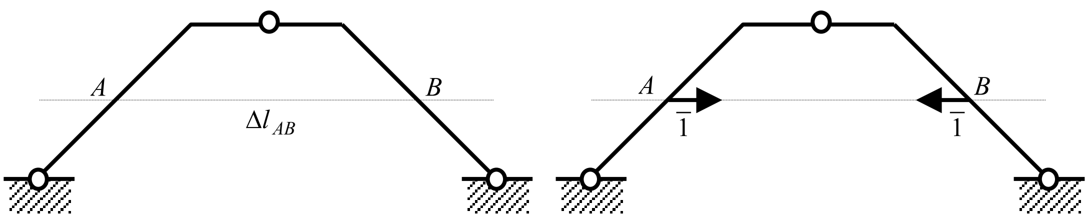
- w celu wyznaczenia składowej pionowej przemieszczenia w wybranym punkcie układu przykładamy w tym punkcie siłę jednostkową o kierunku pionowym



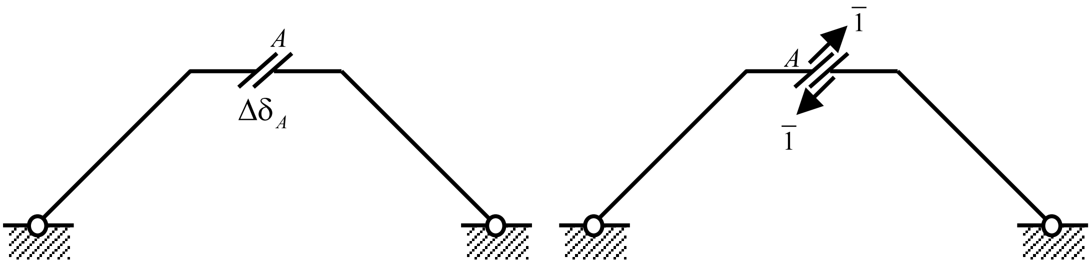
- w celu wyznaczenia składowej poziomej przemieszczenia w wybranym punkcie układu przykładamy w tym punkcie siłę jednostkową o kierunku poziomym



- w celu wyznaczenia zmiany odległości między wybranymi punktami układu przykładamy w tych punktach siły jednostkowe o kierunku prostej, przechodzącej przez te punkty i o przeciwnych zwrotach

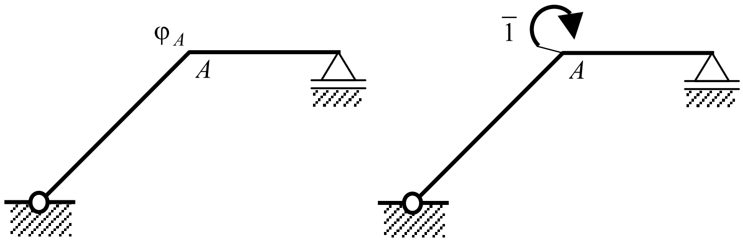


- w celu wyznaczenia rozsunięcia okładek teleskopu przykładamy z jego obu stron siły jednostkowe o kierunku równoległym do okładek i o przeciwnych zwrotach

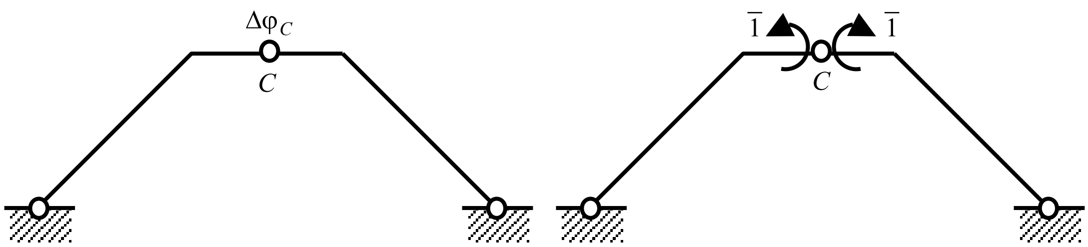


Przemieszczenia kątowe

- w celu wyznaczenia przemieszczenia kątowego w wybranym punkcie układu przykładamy w tym punkcie jednostkowy moment



- w celu wyznaczenia zmiany kąta między prętami układu połączonymi przegubowo, przykładamy do obu prętów w tym punkcie dwa jednostkowe momenty o przeciwnych zwrotach



Zwroty uogólnionych sił jednostkowych można przyjąć dowolnie. Znak dodatni obliczonego przemieszczenia świadczy o tym, że zwrot przemieszczenia jest zgodny ze zwrotem jednostkowego obciążenia, natomiast znak ujemny informuje nas, że zwrot przemieszczenia jest przeciwny do zwrotu jednostkowego obciążenia.