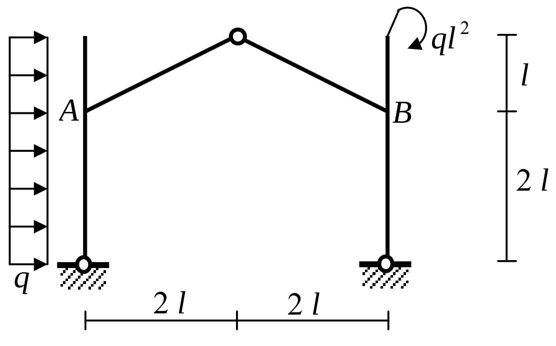
Przykład 3.1. Wyznaczenie zmiany odległości między punktami ramy trójprzegubowej

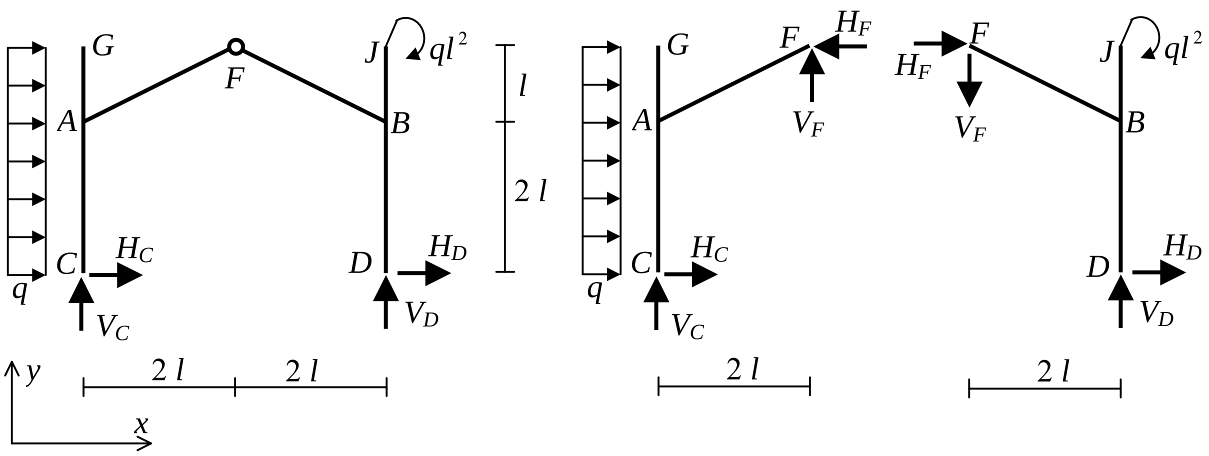
Polecenie: Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczyć zmianę odległości między punktami A i B w poniższym układzie. Przyjąć dla wszystkich prętów EI = const.



W celu wyznaczenia przemieszczenia z wykorzystaniem wzoru Maxwella-Mohra należy wykonać wykresy momentów gnących od obciążenia rzeczywistego i jednostkowego.

Obciążenie rzeczywiste

Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe oraz oddziaływania w przegubie. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Obie podpory są podporami przegubowymi nieprzesuwnymi. Oznaczmy lewą podporę literą C, a prawą literą D. Zarówno w punkcie C jak i D działają po dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma.



Z równania sumy momentów względem punktu C dla całego układu wyznaczymy składową V_D.

$$\sum_i M_{iC} = 0: \qquad V_D \cdot 4l - ql^2 - q \cdot 3l \cdot \frac{1}{2} \cdot 3l = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = \frac{11}{8} \cdot ql$$

Z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla całego układu obliczymy składową V_C.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad V_C + V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = -\frac{11}{8} \cdot ql$$

Składową poziomą reakcji H_D wyznaczymy z równania sumy momentów względem punktu F dla prawego podukładu.

$$\sum_i M_{iF}^p = 0: \qquad V_D \cdot 2l + H_D \cdot 3l - ql^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_D = -\frac{7}{12} \cdot ql$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla całego układu obliczymy składową H_C.

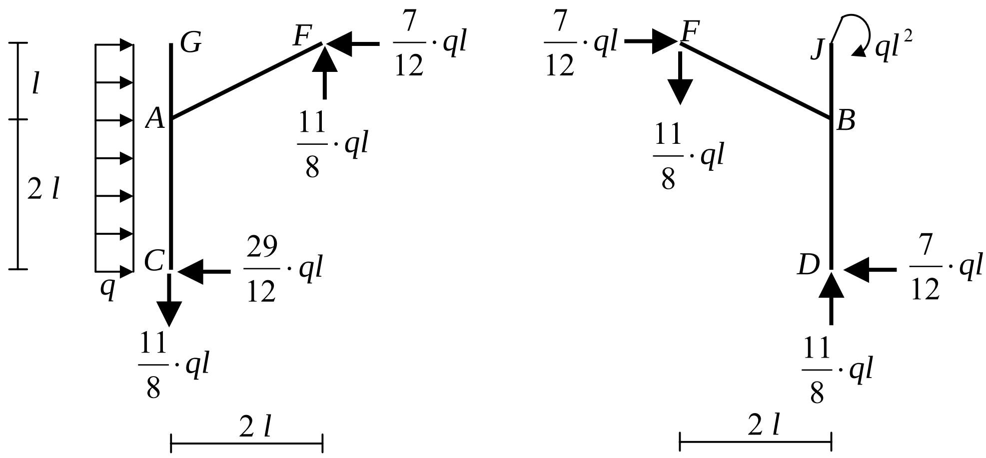
$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad H_C + H_D + 3ql = 0 \quad \Rightarrow \quad H_C = -\frac{29}{12} \cdot ql$$

Wyznaczymy teraz oddziaływania w przegubie F, zapisując równania równowagi dla prawego podukładu. Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą ma postać:

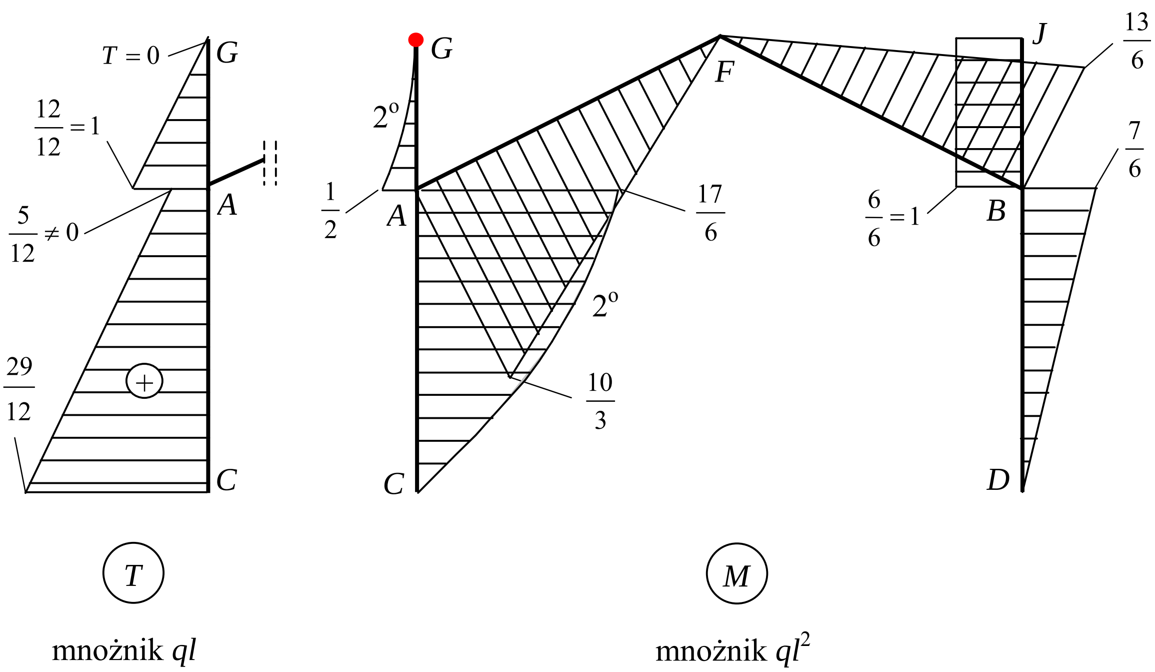
$$\sum_i P_{ix}^p = 0: \qquad H_F + H_D = 0 \quad \Rightarrow \quad H_F = \frac{7}{12} \cdot ql\,,$$

natomiast równanie sumy rzutów sił na oś pionową jest następujące:

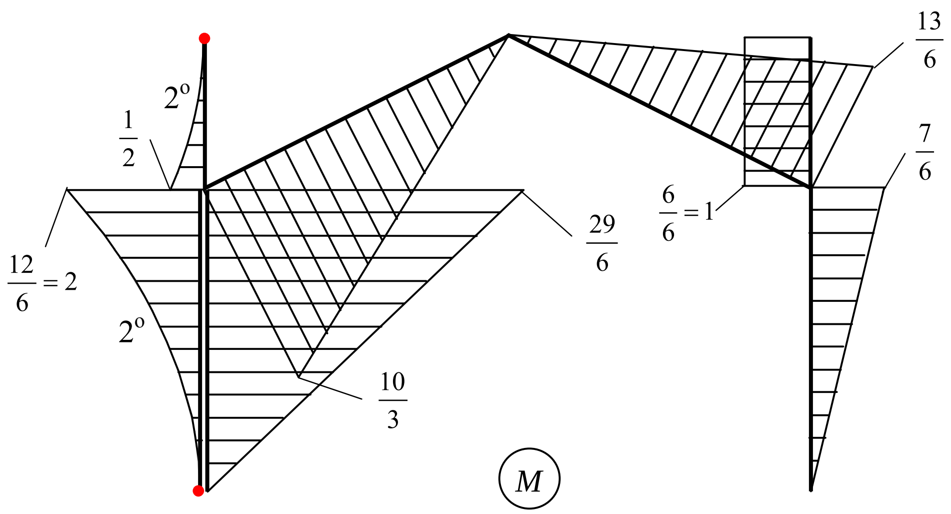
$$\sum_i P_{iy}^p = 0: \qquad V_D - V_F = 0 \quad \Rightarrow \quad V_F = \frac{11}{8} \cdot ql\,.$$



Wykres momentów gnących od obciążenia rzeczywistego jest następujący:



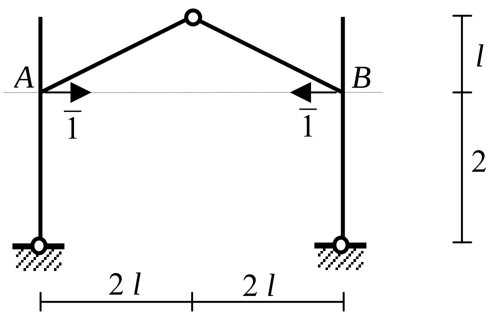
Na lewy słup ramy działa obciążenie ciągłe. Wykonano wykres sił poprzecznych na tym fragmencie układu. W części dolnej słupa ($C \div A$) w żadnym przekroju nie zeruje się siła poprzeczna, a więc w tym przedziale nie występuje ekstremum na wykresie momentów. Przed przystąpieniem do wyznaczenia przemieszczenia za pomocą sposobu Wereszczagina, należy wykres momentów w przedziale ($C \div A$) przedstawić jako sumę takich wykresów, dla których znane jest pole wykresu oraz położenie środka ciężkości (wykres liniowy pochodzi od składowej poziomej reakcji na podporze C, natomiast wykres paraboliczny od obciążenia ciągłego). Miejsce zerowe pochodnej funkcji kwadratowej, opisującej moment zginający wywołany obciążeniem ciągłym, jest oznaczone na wykresie kolorem czerwonym.

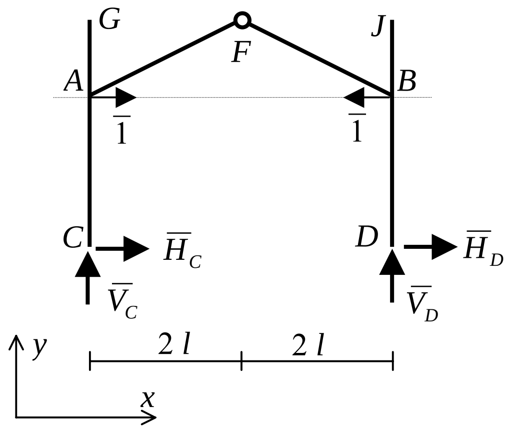


mnożnik ql^2

Obciążenie jednostkowe

Rozpatrywany układ należy obciążyć obciążeniem jednostkowym, stosownym do poszukiwanego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania zmiany odległości między punktami A i B należy do tych punktów przyłożyć dwie siły jednostkowe, o kierunku prostej AB i mające przeciwne zwroty.





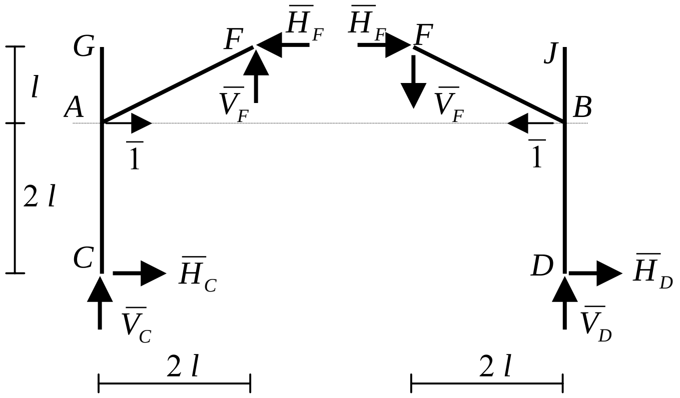
W celu sporządzenia wykresów momentów wyznaczymy reakcje podporowe oraz oddziaływania w przegubie. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Obie podpory są podporami przegubowymi nieprzesuwnymi. Zarówno w punkcie C jak i D działają po dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma.

Z równania sumy momentów względem punktu C dla całego układu wyznaczymy składową $\overline{V}_D$.

$$\sum_i M_{iC} = 0: \qquad \overline{V}_D \cdot 4l + \overline{1} \cdot 2l - \overline{1} \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_D = 0$$

Z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla całego układu obliczymy składową $\overline{V}_C$.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_C + \overline{V}_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_C = 0$$



Składową poziomą reakcji $\overline{H}_D$ wyznaczymy z równania sumy momentów względem punktu F dla prawego podukładu.

$$\sum_i M_{iF}^{p} = 0: \qquad \overline{V}_D \cdot 2l + \overline{H}_D \cdot 3l - \overline{1} \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_D = \frac{1}{3}$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla całego układu obliczymy składową $\overline{H}_C$.

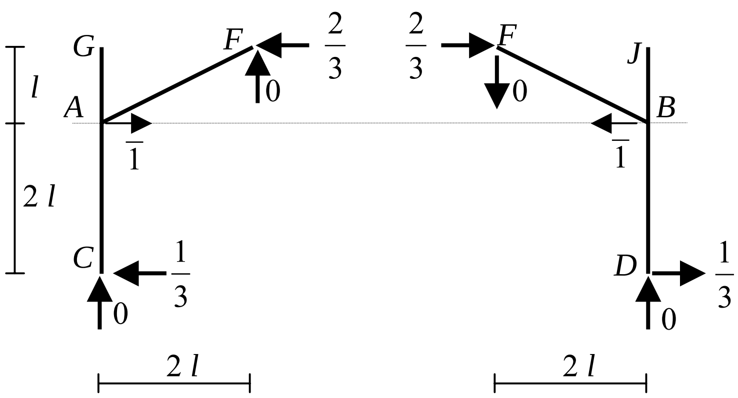
$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_C + \overline{H}_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_C = -\frac{1}{3}$$

Wyznaczymy teraz oddziaływania w przegubie F, zapisując równania równowagi dla prawego podukładu. Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą ma postać:

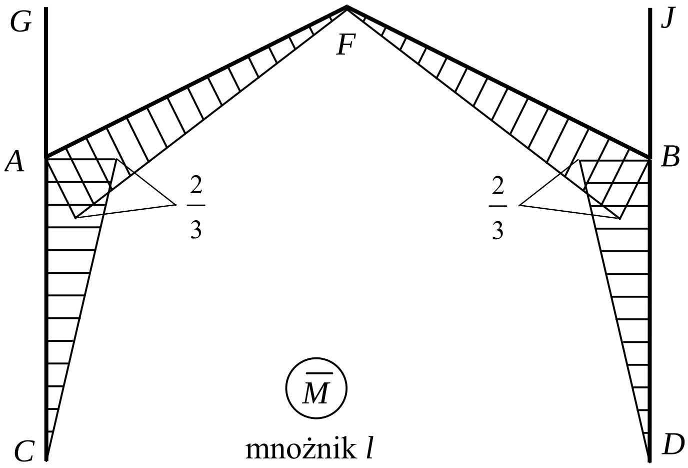
$$\sum_i P_{ix}^{p} = 0: \qquad \overline{H}_F + \overline{H}_D - \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_F = \frac{2}{3},$$

natomiast równanie sumy rzutów sił na oś pionową jest następujące:

$$\sum_i P_{iy}^{p} = 0: \qquad \overline{V}_D - \overline{V}_F = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_F = 0.$$



Wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego jest następujący:



Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczymy zmianę odległości między punktami A i B.

$$\Delta l_{AB} = \int_s \frac{\overline{M}\, M}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_s \overline{M}\, M\, ds$$

Całkowanie możemy wykonać sposobem Wereszczagina, ponieważ w każdym przedziale całkowania co najmniej jedna z funkcji podcałkowych jest liniowa.

$$\Delta l_{AB} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\underbrace{-\frac{1}{3} \cdot 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{6} ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l}_{CA} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{6} ql^2 \cdot \sqrt{5}\, l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l}_{AF} + \right.$$

$$\left. \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{6} ql^2 \cdot \sqrt{5} l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l}_{FB} \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l}_{BD} \right) = \frac{26 + 7 \cdot \sqrt{5}}{27} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cong 1{,}5427 \cdot \frac{ql^4}{EI}$$

Znak dodatni obliczonego przemieszczenia świadczy o tym, że punkty A i B zbliżą się do siebie, ponieważ zwrot przemieszczenia jest zgodny ze zwrotem obciążenia jednostkowego.