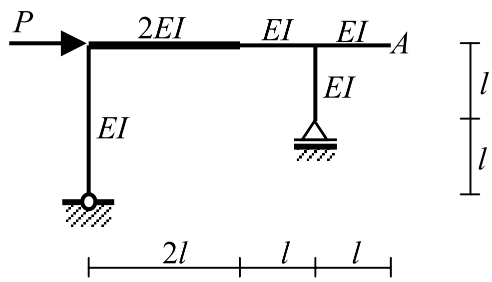
Przykład 3.2. Rama wolnopodparta

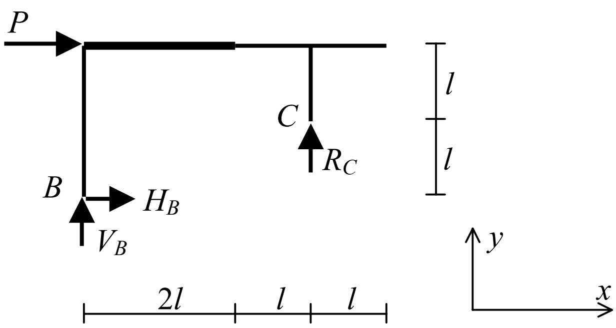
Polecenie: Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczyć wektor przemieszczenia w punkcie *A* w poniższym układzie.

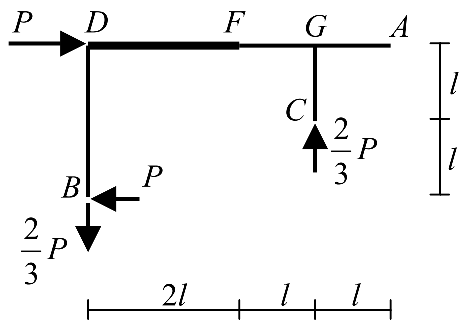


Poszukiwać będziemy składowych (pionowej i poziomej) wektora przemieszczenia punktu *A*, ponieważ nie znamy kierunku tego wektora. W celu wyznaczenia składowych wektora przemieszczenia z wykorzystaniem wzoru Maxwella-Mohra należy wykonać wykresy momentów gnących od obciążenia rzeczywistego i od obciążeń jednostkowych.

Obciążenie rzeczywiste

Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą *B*. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą *C*. W punkcie *B* działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie *C* działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).





Z równania sumy momentów względem punktu *B* wyznaczymy reakcję R_C.

$$\sum_i M_{iB} = 0: \qquad R_C \cdot 3l - P \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{2}{3} \cdot P$$

Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową V_B.

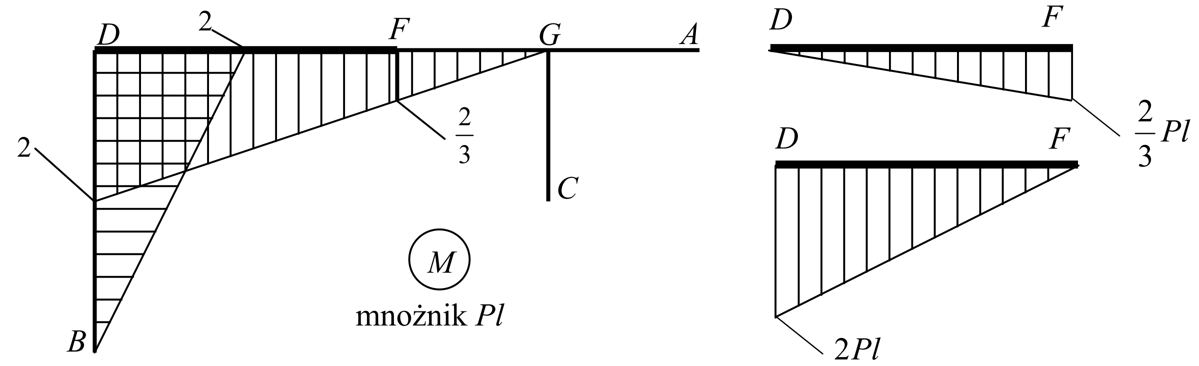
$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad V_B + R_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = -\frac{2}{3} \cdot P$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą obliczymy składową H_B.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad H_B + P = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = -P$$

Wprowadzimy dodatkowo oznaczenia dla węzłów (węzeł lewy: *D*, węzeł prawy: *G*) oraz dla punktu, w którym skokowo zmienia się sztywność zginania rygla: *F*.

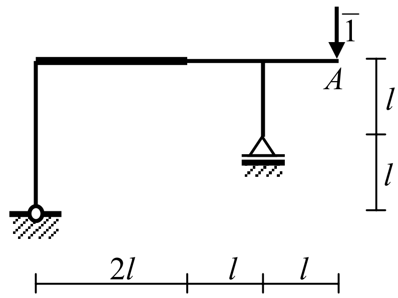
Wykres momentów gnących od obciążenia rzeczywistego jest następujący:



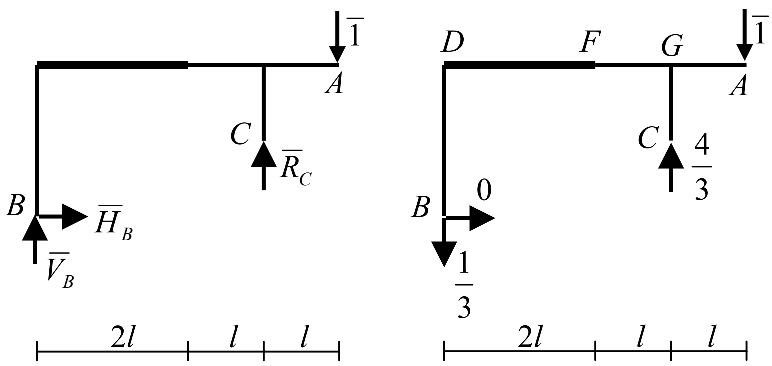
Na powyższym rysunku z prawej strony pokazano podział obszaru trapezowego w przedziale $D \div F$ na dwa obszary trójkątne.

<u>Wyznaczenie składowej pionowej v_A - obciążenie jednostkowe</u>

Rozpatrywany układ należy obciążyć obciążeniem jednostkowym, stosownym do poszukiwanego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania składowej pionowej przemieszczenia punktu *A*, należy do tego punktu przyłożyć siłę jednostkową o kierunku pionowym.



Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Działają tu dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Występuje tutaj reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).



Z równania sumy momentów względem punktu *B* wyznaczymy reakcję $\overline{R}_C$.

$$\sum_i M_{iB} = 0: \qquad \overline{R}_C \cdot 3l - \overline{1} \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{R}_C = \frac{4}{3}$$

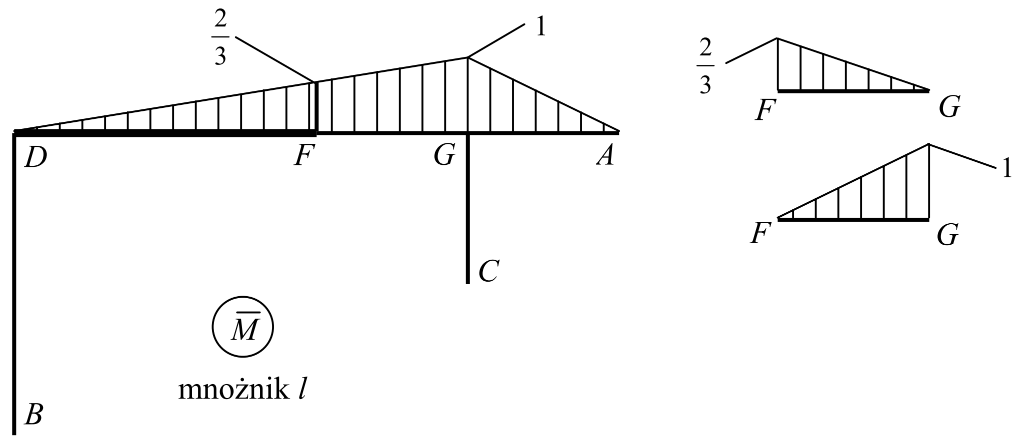
Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową $\overline{V}_B$.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_B + \overline{R}_C - \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_B = -\frac{1}{3}$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą obliczymy składową $\overline{H}_B$.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_B = 0$$

Wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego jest następujący:



Na powyższym rysunku z prawej strony pokazano podział obszaru trapezowego w przedziale $F \div G$ na dwa obszary trójkątne.

Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczymy składową pionową punktu A.

$$v_A = \int_s \frac{\overline{M}\, M}{EI} ds$$

Całkowanie możemy wykonać sposobem Wereszczagina. Ze względu na zmianę sztywności zginania na ryglu przedział $D \div G$ należy podzielić na dwa przedziały: $D \div F$ i $F \div G$. W przedziale $D \div F$ figura pod wykresem momentów M jest trapezem. Również w przedziale $F \div G$ figura pod wykresem momentów $\overline{M}$ jest trapezem. W celu uniknięcia konieczności wyznaczania odciętych środków ciężkości trapezów zastosowano podział każdego obszaru trapezowego na dwa obszary trójkątne. Nie jest to jedyny możliwy sposób podziału.

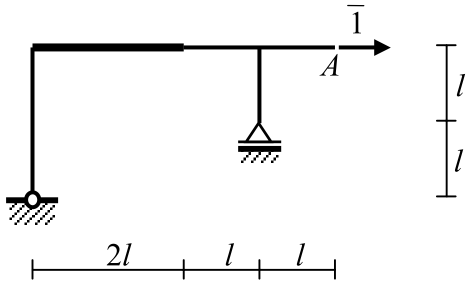
$$v_A = \underbrace{\frac{1}{2EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l \cdot 2l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2Pl + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot Pl \right) \right]}_{DF} \underbrace{- \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Pl \cdot l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot l + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l \right)}_{FG} =$$

$$= -\frac{17}{27} \cdot \frac{Pl^3}{EI} = -0{,}6296 \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

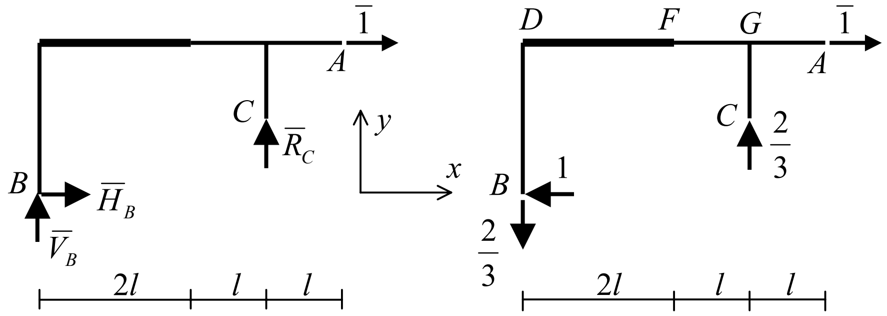
Skoro składowa pionowa przemieszczenia punktu A ma wartość ujemną, to zwrot tej składowej jest przeciwny do zwrotu siły jednostkowej.

Wyznaczenie składowej poziomej u_A - obciążenie jednostkowe

Rozpatrywany układ należy obciążyć obciążeniem jednostkowym, stosownym do poszukiwanego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania składowej poziomej przemieszczenia punktu A, należy do tego punktu przyłożyć siłę jednostkową o kierunku poziomym.



Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. W miejscu lewej podpory (przegubowej nieprzesuwnej) działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Występuje tutaj reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).



Z równania sumy momentów względem punktu B wyznaczymy reakcję $\overline{R}_C$.

$$\sum_i M_{iB} = 0: \qquad \overline{R}_C \cdot 3l - \overline{1} \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{R}_C = \frac{2}{3}$$

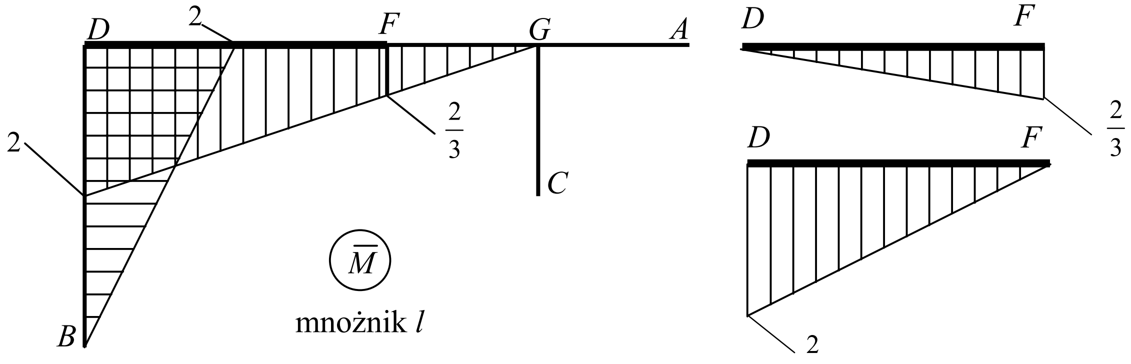
Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową $\overline{V}_B$.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_B + \overline{R}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_B = -\frac{2}{3}$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą obliczymy składową $\overline{H}_B$.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_B + \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_B = -1$$

Wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego jest następujący:



Na powyższym rysunku z prawej strony pokazano podział obszaru trapezowego w przedziale $D \div F$ na dwa obszary trójkątne.

Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczymy składową poziomą punktu A.

$$u_A = \int_s \frac{\overline{M}\,M}{EI}\,ds$$

Całkowanie możemy wykonać sposobem Wereszczagina. Ze względu na zmianę sztywności zginania na ryglu przedział $D \div G$ należy podzielić na dwa przedziały: $D \div F$ i $F \div G$. W przedziale $D \div F$ figura pod wykresem momentów M jak i $\overline{M}$ jest trapezem. W celu uniknięcia konieczności wyznaczania odciętej środka ciężkości trapezu zastosowano podział obszaru trapezowego na dwa obszary trójkątne. Nie jest to jedyny możliwy sposób podziału.

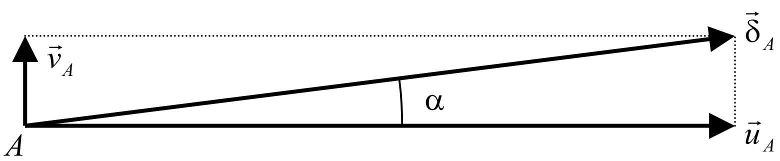
$$u_A = \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2Pl\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l}_{BD} + \underbrace{\frac{1}{2EI}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 2Pl\cdot 2l\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}l+\frac{2}{3}\cdot 2l\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}Pl\cdot 2l\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}l+\frac{1}{3}\cdot 2l\right)\right]}_{DF}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}Pl\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}l}_{FG} = \frac{128}{27}\cdot\frac{Pl^3}{EI} \cong 4{,}7407\cdot\frac{Pl^3}{EI}$$

Skoro składowa pozioma przemieszczenia punktu A ma wartość dodatnią, to zwrot tej składowej jest zgodny ze zwrotem siły jednostkowej.

Wektor przemieszczenia punktu A jest sumą składowych.

$$\vec{\delta}_A = \vec{u}_A + \vec{v}_A$$



Długość wektora przemieszczenia punktu A wynosi

$$\left|\vec{\delta}_A\right| = \delta_A = \sqrt{u_A^2 + v_A^2} = \sqrt{\left(\frac{128}{27}\cdot\frac{Pl^3}{EI}\right)^2 + \left(\frac{17}{27}\cdot\frac{Pl^3}{EI}\right)^2} = 4{,}7824\cdot\frac{Pl^3}{EI}$$

Tangens kąta nachylenia wektora przemieszczenia punktu A do poziomu jest równy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{17}{27}\cdot\frac{Pl^3}{EI}}{\frac{128}{27}\cdot\frac{Pl^3}{EI}} = \frac{17}{128} = 0{,}1328$$

stąd

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\alpha = 0{,}1320\,\text{rad} = 7^\circ 33' 55''.$$