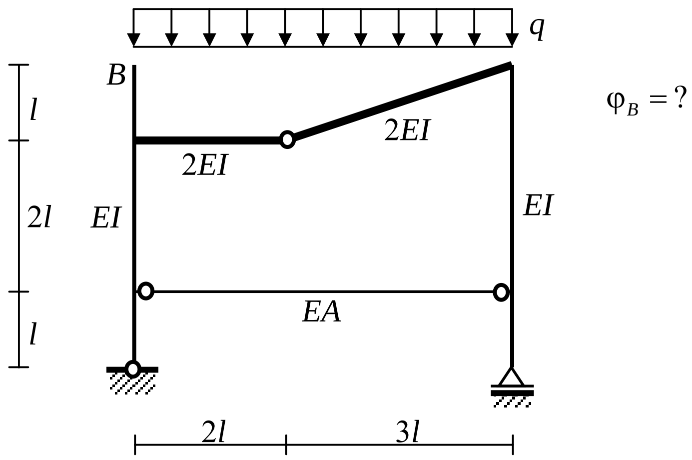
Przykład 3.3. Rama ze ściągiem

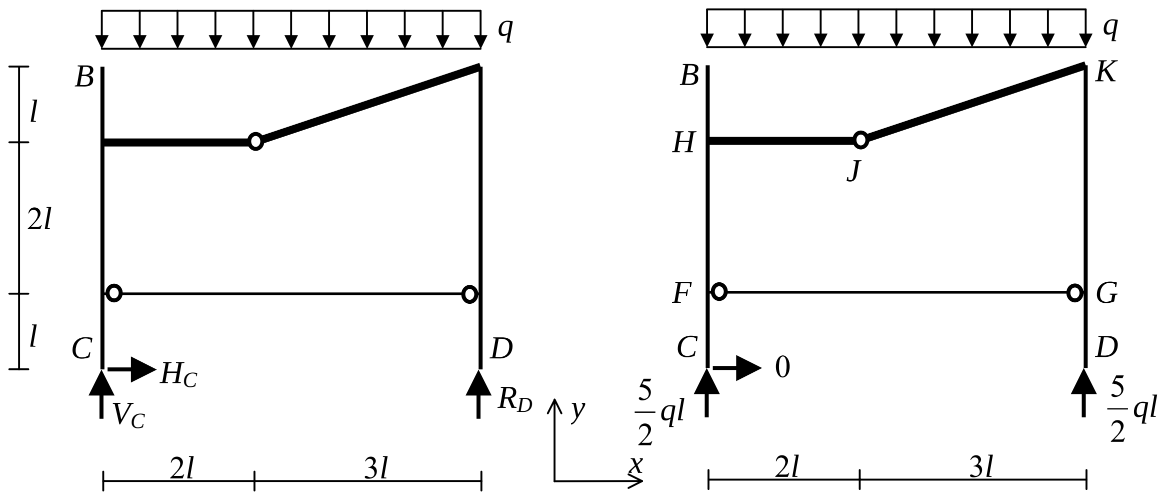
Polecenie: Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczyć przemieszczenie kątowe w punkcie B w poniższym układzie. Pominąć wpływ sił normalnych w części „ramowej” układu.



W celu wyznaczenia przemieszczenia kątowego z wykorzystaniem wzoru Maxwella-Mohra należy wykonać wykresy momentów gnących od obciążenia rzeczywistego i obciążenia jednostkowego.

<u>Obciążenie rzeczywiste</u>

Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą C. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą D. W punkcie C działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie D działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).



Z równania sumy momentów względem punktu C wyznaczymy reakcję R_D.

$$\sum_i M_{iC} = 0: \qquad R_D \cdot 5l - q \cdot 5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 5l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_D = \frac{5}{2} \cdot ql$$

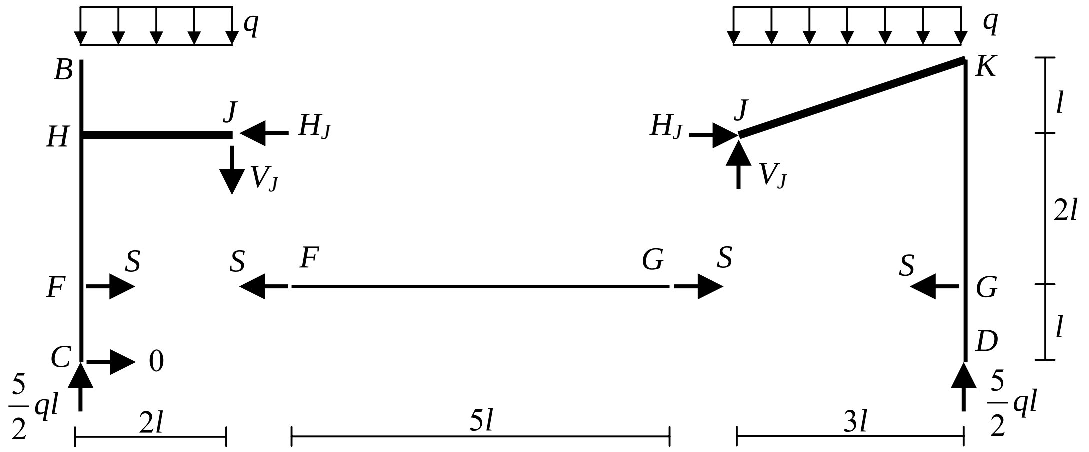
Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową V_C.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad V_C + R_D - q \cdot 5l = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = \frac{5}{2} \cdot ql$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą obliczymy składową H_C.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad H_C = 0$$

Przed sporządzeniem wykresu momentów gnących w rozpatrywanym układzie należy również wyznaczyć siłę w ściągu. W tym celu podzielimy układ na podukłady.



Siłę S wyznaczymy z równania sumy momentów względem punktu J dla lewego podukładu.

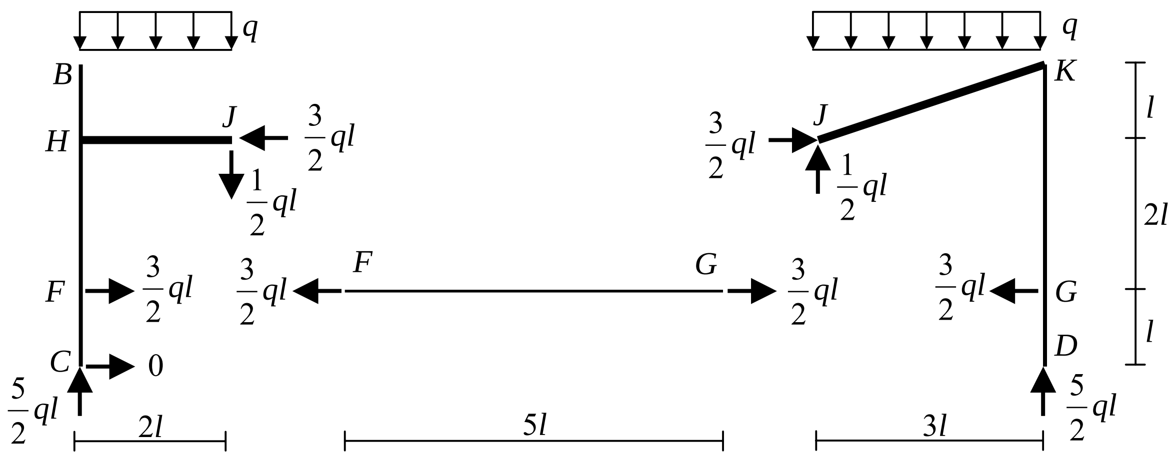
$$\sum_i M_{iJ}^l = 0: \qquad -V_C \cdot 2l + H_C \cdot 3l + S \cdot 2l + q \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{3}{2} \cdot ql$$

Wyznaczymy teraz oddziaływania w przegubie J, zapisując równania równowagi dla lewego podukładu. Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą ma postać:

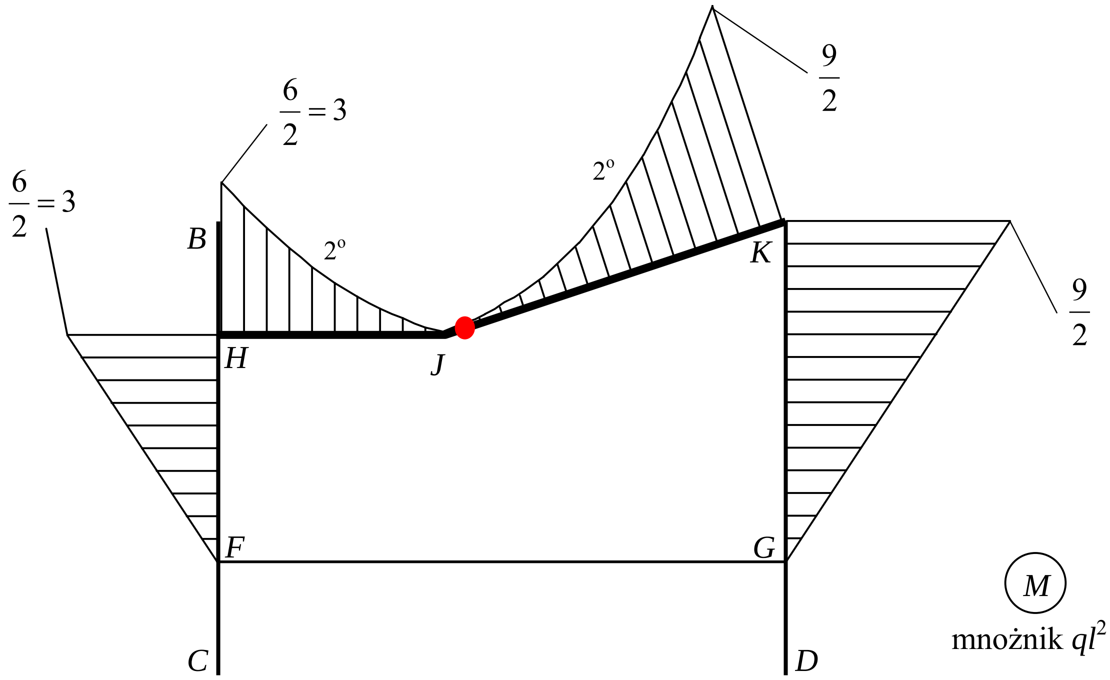
$$\sum_i P_{ix}^l = 0: \qquad H_C + S - H_J = 0 \quad \Rightarrow \quad H_J = \frac{3}{2} \cdot ql,$$

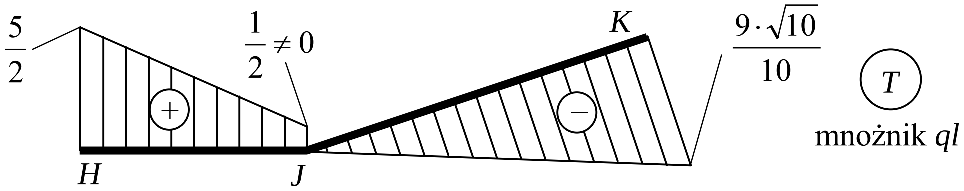
natomiast równanie sumy rzutów sił na oś pionową jest następujące:

$$\sum_i P_{iy}^l = 0: \qquad V_C - V_J - q \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad V_J = \frac{1}{2} \cdot ql.$$

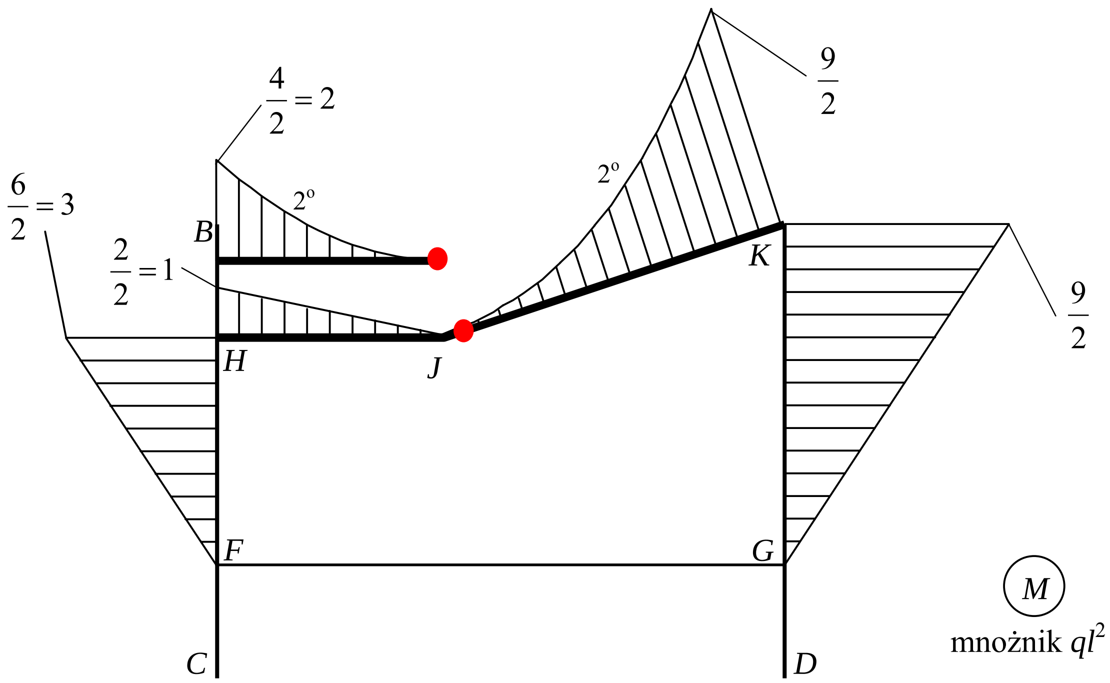


Wykres momentów gnących od obciążenia rzeczywistego jest następujący:





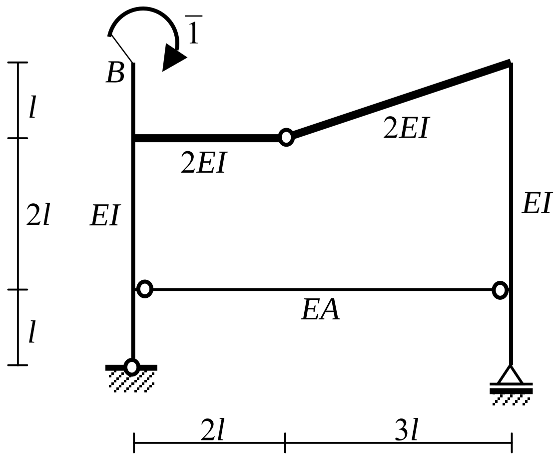
Na fragmencie układu ($H \div J \div K$), na który działa obciążenie ciągłe sporządzono wykres sił poprzecznych. Na tej podstawie stwierdzamy, że w przedziale $H \div J$ na wykresie momentów nie występuje ekstremum. Należy więc przedstawić wykres momentów w tym przedziale jako sumę wykresu liniowego i parabolicznego z ekstremum w punkcie J.



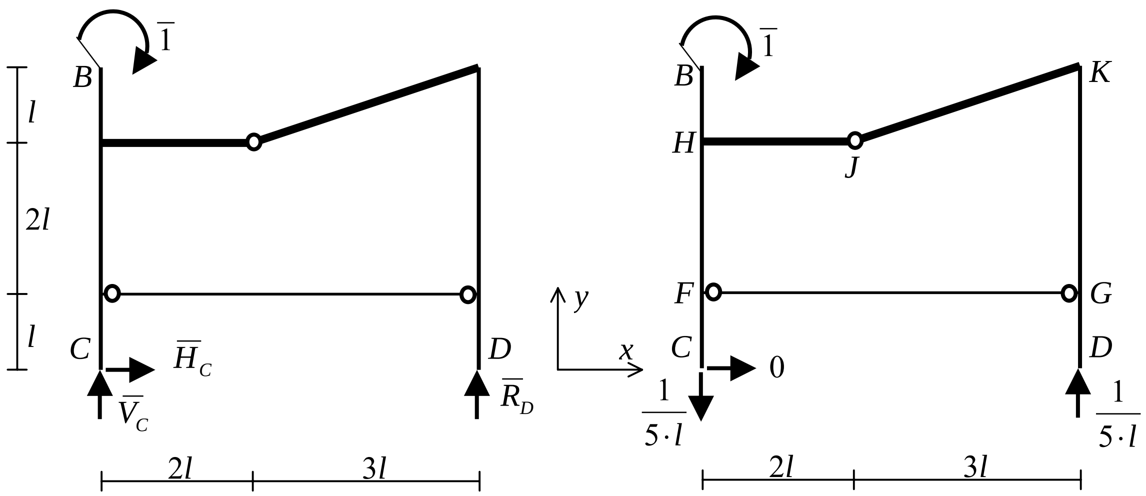
Miejsce zerowe pochodnej funkcji kwadratowej opisującej moment zginający wywołany obciążeniem ciągłym, jest oznaczone na wykresie kolorem czerwonym.

Obciążenie jednostkowe

Rozpatrywany układ należy obciążyć obciążeniem jednostkowym, stosownym do poszukiwanego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania przemieszczenia kątowego punktu *B*, należy do tego punktu przyłożyć jako siłę uogólnioną jednostkowy moment.



Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą *C*. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą *D*. W punkcie *C* działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie *D* działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).



Z równania sumy momentów względem punktu *C* wyznaczymy reakcję $\overline{R}_D$.

$$\sum_i M_{iC} = 0: \qquad \overline{R}_D \cdot 5l - \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{R}_D = \frac{1}{5\cdot l}$$

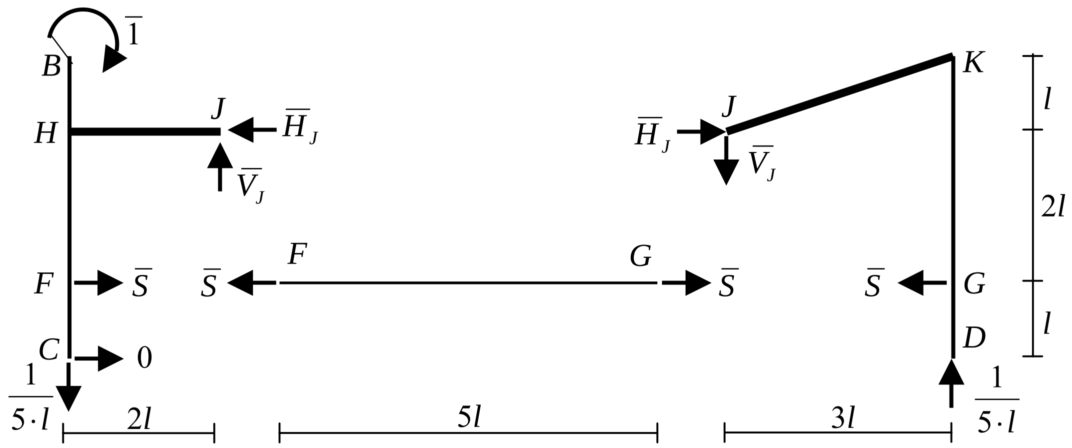
Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową $\overline{V}_C$.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_C + \overline{R}_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_C = -\frac{1}{5\cdot l}$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą obliczymy składową $\overline{H}_C$.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_C = 0$$

Przed sporządzeniem wykresu momentów gnących w rozpatrywanym układzie należy również wyznaczyć siłę w ściągu. W tym celu podzielimy układ na podukłady.



Siłę $\overline{S}$ wyznaczymy z równania sumy momentów względem punktu J dla prawego podukładu.

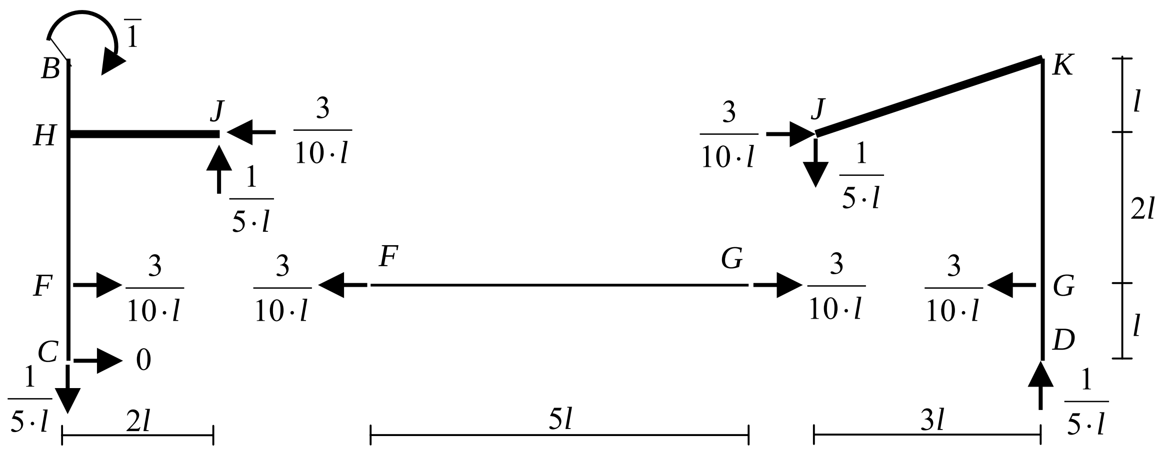
$$\sum_i M_{iJ}^{p} = 0: \qquad \overline{R}_D \cdot 3l - \overline{S} \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{S} = \frac{3}{10 \cdot l}$$

Wyznaczymy teraz oddziaływania w przegubie J, zapisując równania równowagi dla prawego podukładu. Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą ma postać:

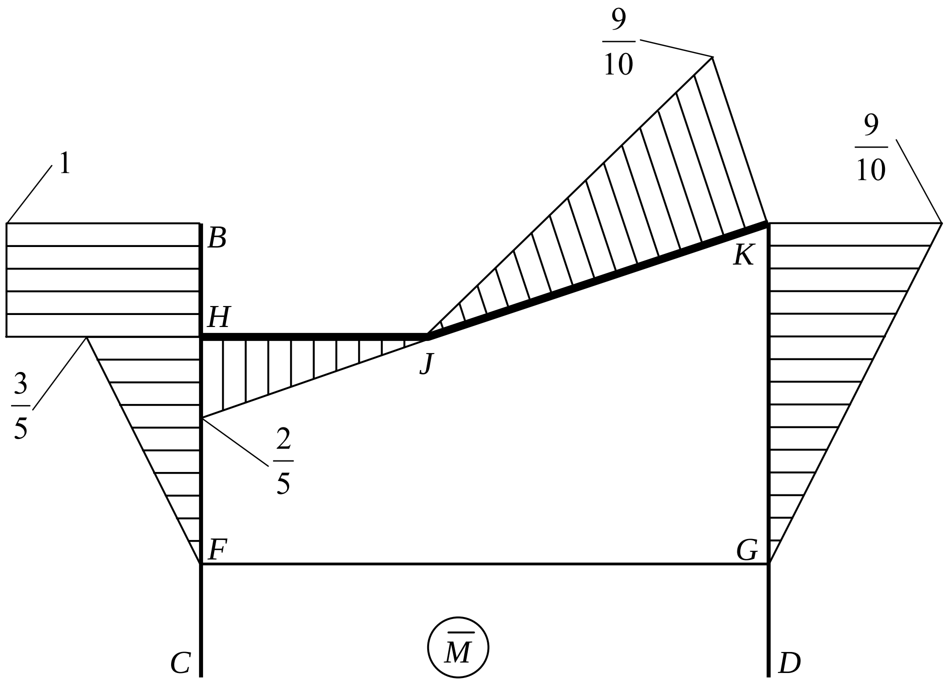
$$\sum_i P_{ix}^{p} = 0: \qquad \overline{H}_J - \overline{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_J = \frac{3}{10 \cdot l},$$

natomiast równanie sumy rzutów sił na oś pionową jest następujące:

$$\sum_i P_{iy}^{p} = 0: \qquad \overline{R}_D - \overline{V}_J = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_J = \frac{1}{5 \cdot l}.$$



Wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego jest następujący:



Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczymy przemieszczenie kątowe w punkcie B.

$$\varphi_B = \int_s \left(\frac{\overline{M}\,M}{EI} + \frac{\overline{N}\,N}{EA} \right) ds$$

Całkowanie możemy wykonać sposobem Wereszczagina.

$$\varphi_B = \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3ql^2\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}}_{FH} \underbrace{-\frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1ql^2\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2ql^2\cdot 2l\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}_{HJ}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}ql^2\cdot\sqrt{10}\,l\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{10}}_{JK}+\underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}ql^2\cdot 3l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}}_{KG}+\underbrace{\frac{1}{EA}\cdot\frac{3}{2}ql\cdot 5l\cdot\frac{3}{10\cdot l}}_{FG}=$$

$$=\frac{2360+243\cdot\sqrt{10}}{480}\cdot\frac{ql^3}{EI}+\frac{9}{4}\cdot\frac{ql}{EA}=6{,}5176\cdot\frac{ql^3}{EI}+2{,}2500\cdot\frac{ql}{EA}$$

Przemieszczenie kątowe φ_B jest dodatnie gdyż oba składniki sumy mają dodatni znak. Oznacza to, że przemieszczenie kątowe ma zwrot zgodny ze zwrotem jednostkowego momentu przyłożonego w punkcie B.