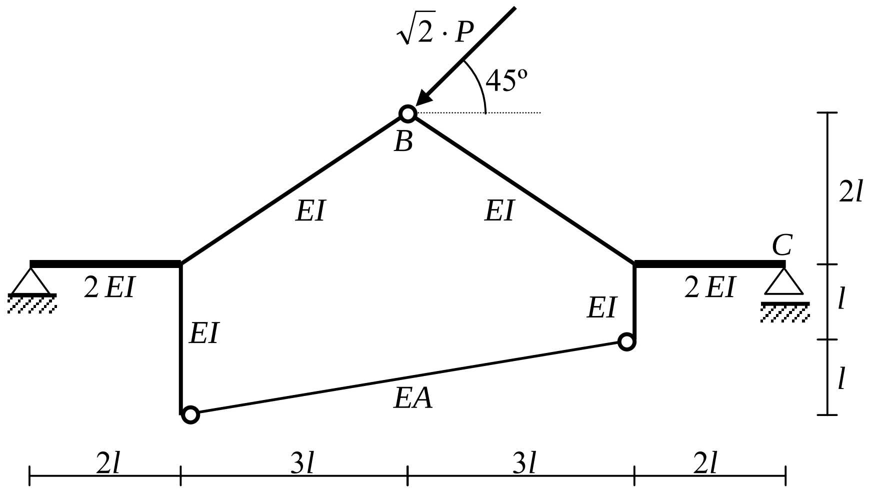
Przykład 3.4. Rama ze ściągiem

Polecenie: Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczyć wzajemną zmianę kąta w punkcie *B* oraz przemieszczenie punktu *C* w poniższym układzie. Pominąć wpływ sił normalnych w części „ramowej" układu.



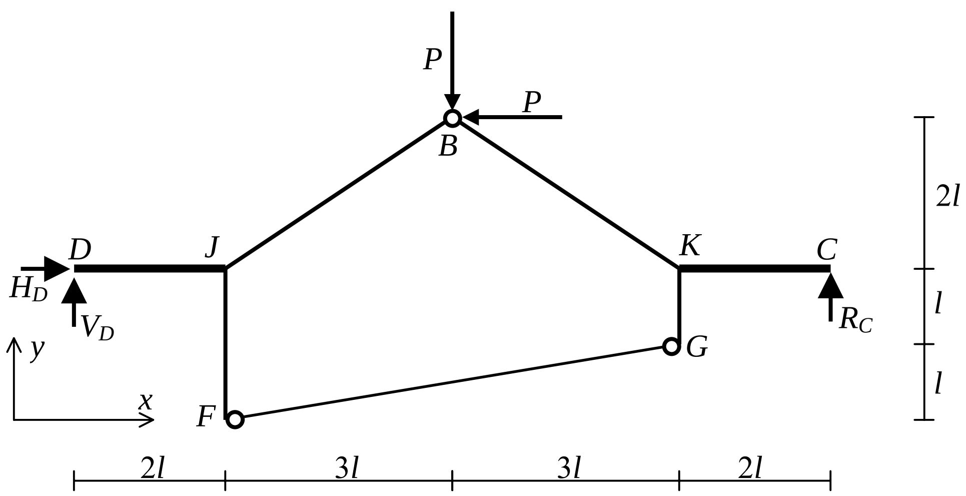
$\Delta\varphi_B = ?$

$\delta_C = ?$

W celu wyznaczenia wzajemnej zmiany kąta w punkcie *B* oraz przemieszczenia punktu *C* z wykorzystaniem wzoru Maxwella-Mohra należy wykonać wykresy momentów gnących od obciążenia rzeczywistego i obciążeń jednostkowych.

Obciążenie rzeczywiste

Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą *D*. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą *C*. W punkcie *D* działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie *C* działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu). W celu uproszczenia zapisu równań równowagi rozłożymy siłę skupioną na dwie składowe: pionową i poziomą o wartości *P*.



Z równania sumy momentów względem punktu *D* wyznaczymy reakcję R_C.

$$\sum_i M_{iD} = 0: \qquad R_C \cdot 10l + P\cdot 2l - P\cdot 5l = 0 \;\Rightarrow\; R_C = \frac{3}{10}\cdot P$$

Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową V_D.

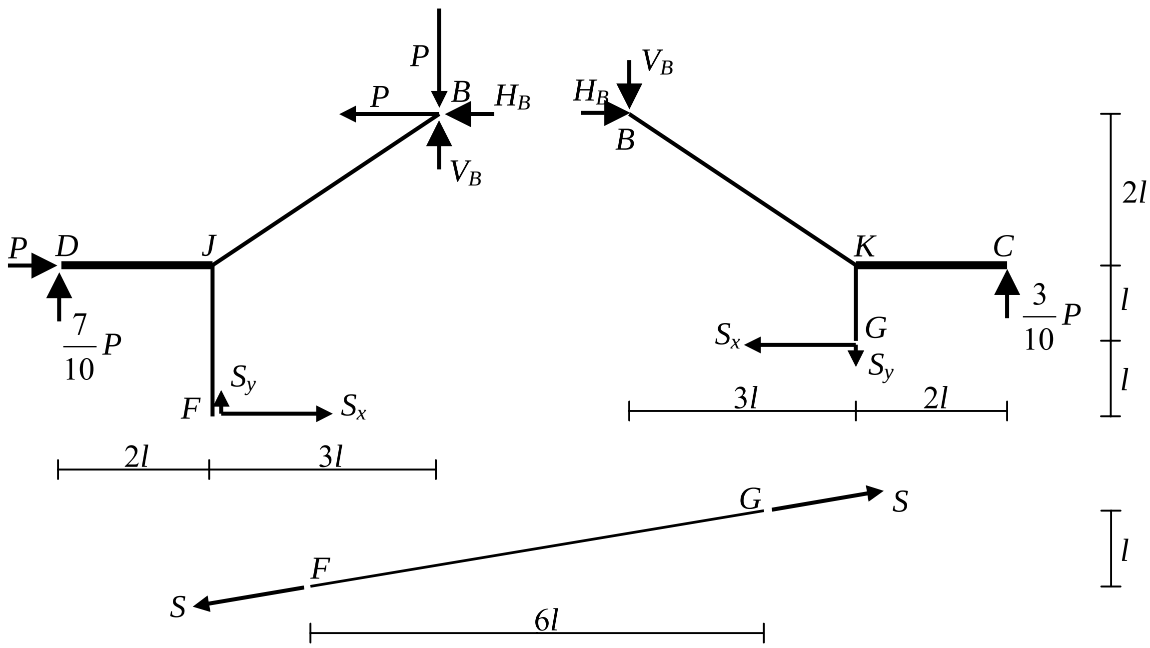
$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad V_D + R_C - P = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = \frac{7}{10} \cdot P$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą obliczymy składową H_D.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad H_D - P = 0 \quad \Rightarrow \quad H_D = P$$

Przed sporządzeniem wykresu momentów gnących w rozpatrywanym układzie należy również wyznaczyć siłę w ściągu. W tym celu podzielimy układ na podukłady. Siłę w ściągu S oddziaływującą na lewy i prawy podukład zastąpimy dwiema składowymi: pionową S_y i poziomą S_x. Są one równe:

$$S_y = S \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} \qquad\qquad S_x = S \cdot \frac{6}{\sqrt{37}}.$$



Siłę S wyznaczymy z równania sumy momentów względem punktu B dla prawego podukładu.

$$\sum_i M_{iB}^{p} = 0: \qquad R_C \cdot 5l - S \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} \cdot 3l - S \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} \cdot 3l = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\sqrt{37}}{14} \cdot P$$

Wyznaczymy teraz oddziaływania w przegubie B, zapisując równania równowagi dla prawego podukładu. Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą ma postać:

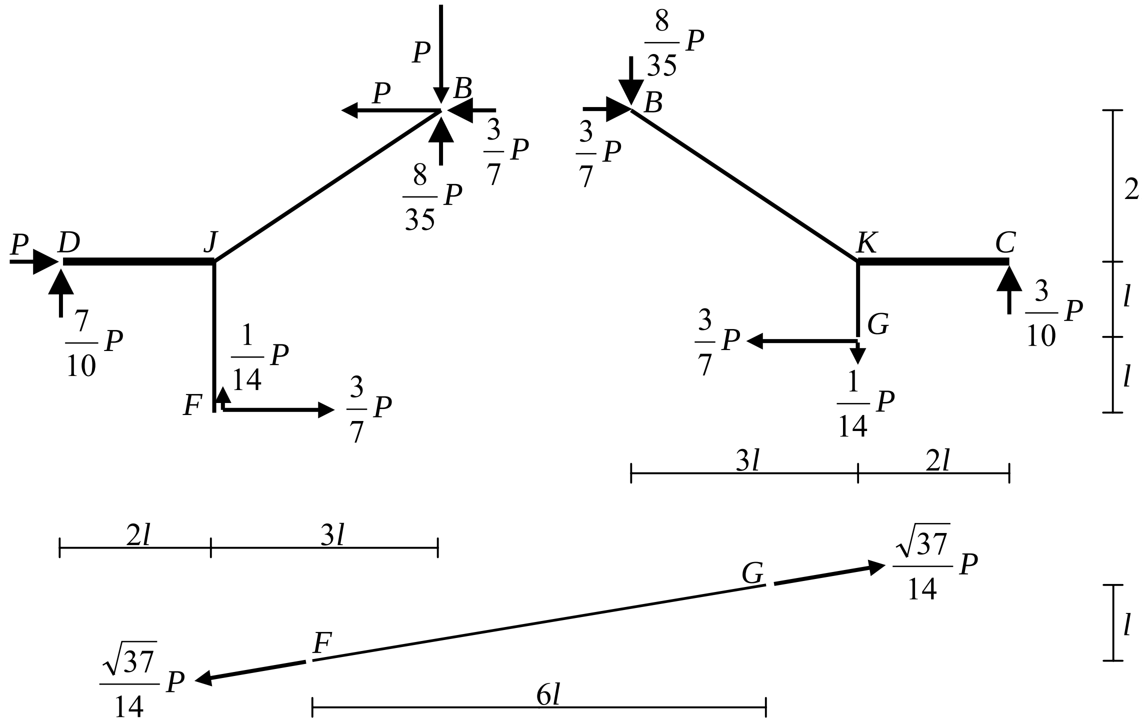
$$\sum_i P_{ix}^{p} = 0: \qquad H_B - S \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = \frac{3}{7} \cdot P,$$

natomiast równanie sumy rzutów sił na oś pionową jest następujące:

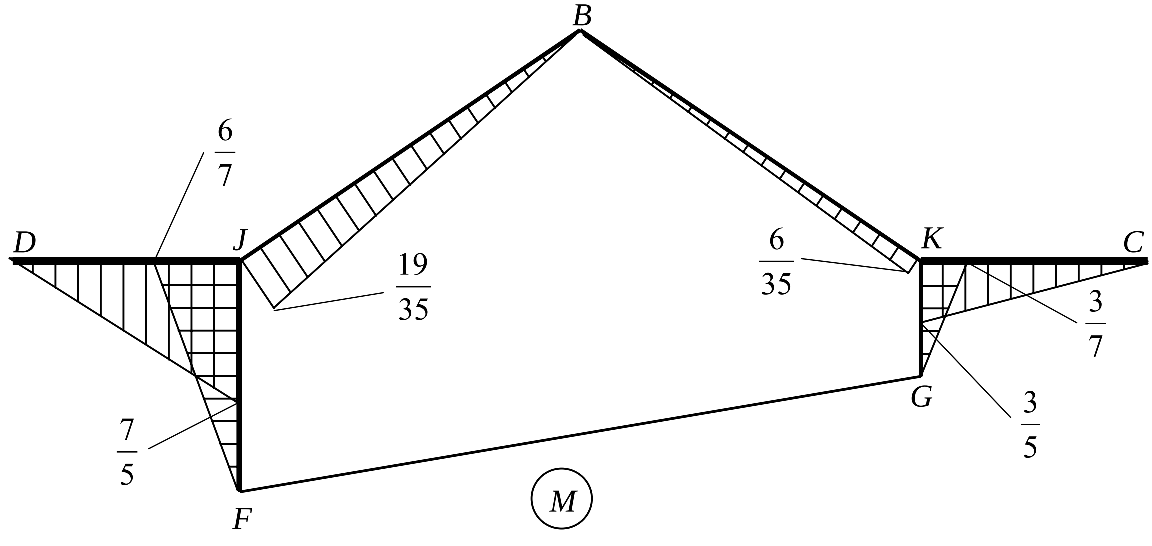
$$\sum_i P_{iy}^{p} = 0: \qquad R_C - V_B - S \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{8}{35} \cdot P.$$

Składowe siły w ściągu S wynoszą:

$$S_y = S \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} = \frac{1}{14} \cdot P \qquad\qquad S_x = S \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} = \frac{3}{7} \cdot P$$



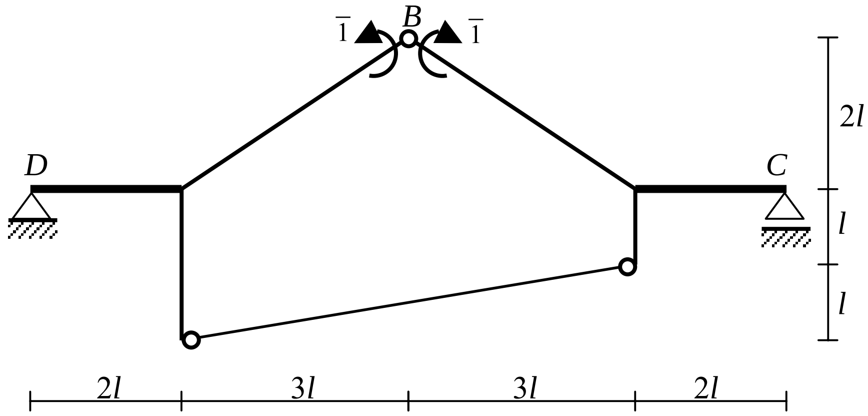
Wykres momentów gnących od obciążenia rzeczywistego jest następujący:



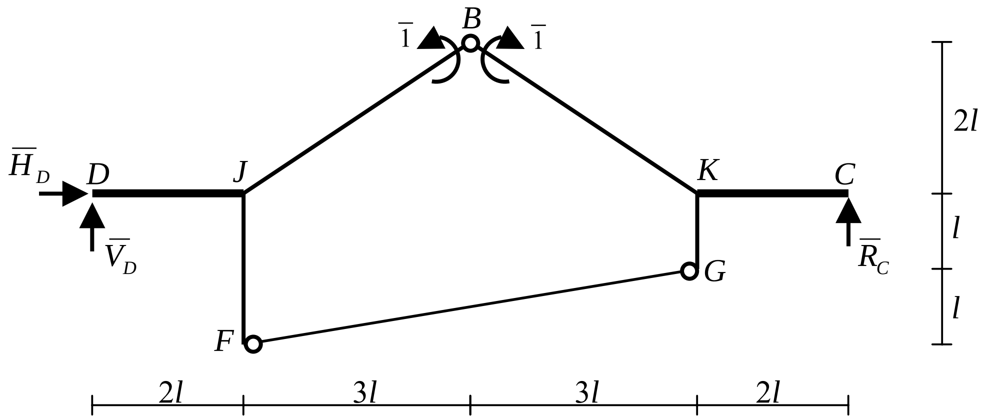
mnożnik Pl

<u>Wyznaczenie wzajemnej zmiany kąta $\Delta\varphi_B$ - obciążenie jednostkowe</u>

Rozpatrywany układ należy obciążyć obciążeniem jednostkowym, stosownym do poszukiwanego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania wzajemnej zmiany kąta w punkcie B, należy z obu stron przegubu przyłożyć jako siłę uogólnioną parę jednostkowych momentów o przeciwnych zwrotach.



Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą *D*. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą *C*. W punkcie *D* działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie *C* działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).



Z równania sumy momentów względem punktu *D* wyznaczymy reakcję $\overline{R}_C$.

$$\sum_i M_{iD} = 0: \qquad \overline{R}_C \cdot 10l + \overline{1} - \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{R}_C = 0$$

Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową $\overline{V}_D$.

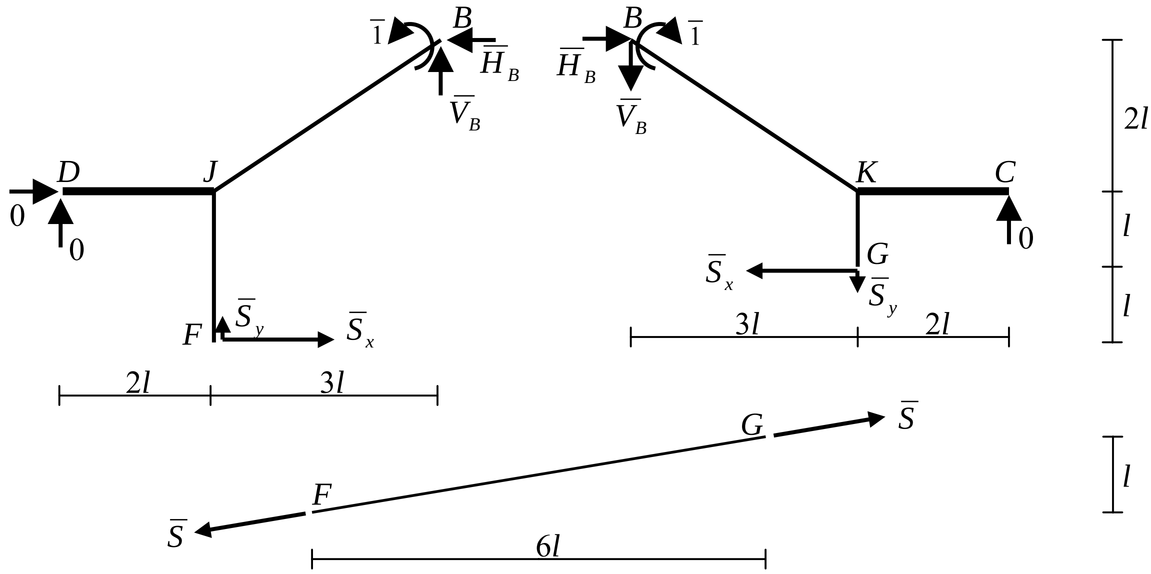
$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_D + \overline{R}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_D = 0$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą obliczymy składową $\overline{H}_D$.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_D = 0$$

Przed sporządzeniem wykresu momentów gnących w rozpatrywanym układzie należy również wyznaczyć siłę w ściągu. W tym celu podzielimy układ na podukłady. Siłę w ściągu $\overline{S}$ oddziaływującą na lewy i prawy podukład zastąpimy dwiema składowymi: pionową $\overline{S}_y$ i poziomą $\overline{S}_x$. Są one równe:

$$\overline{S}_y = \overline{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} \qquad\qquad \overline{S}_x = \overline{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}}.$$



Siłę $\overline{S}$ wyznaczymy z równania sumy momentów względem punktu *B* dla prawego podukładu.

$$\sum_i M_{iB}^p = 0: \qquad \overline{R}_C \cdot 5l - \overline{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} \cdot 3l - \overline{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} \cdot 3l - \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{S} = -\frac{\sqrt{37}}{21 \cdot l}$$

Wyznaczymy teraz oddziaływania w przegubie *B*, zapisując równania równowagi dla prawego podukładu. Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą ma postać:

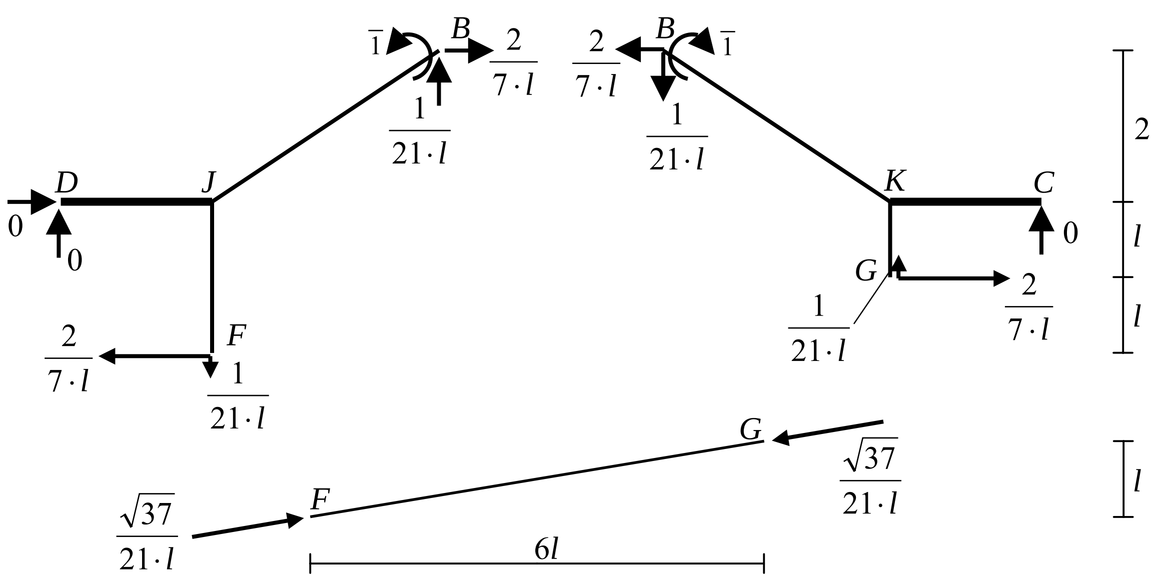
$$\sum_i P_{ix}^p = 0: \qquad \overline{H}_B - \overline{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_B = -\frac{2}{7 \cdot l},$$

natomiast równanie sumy rzutów sił na oś pionową jest następujące:

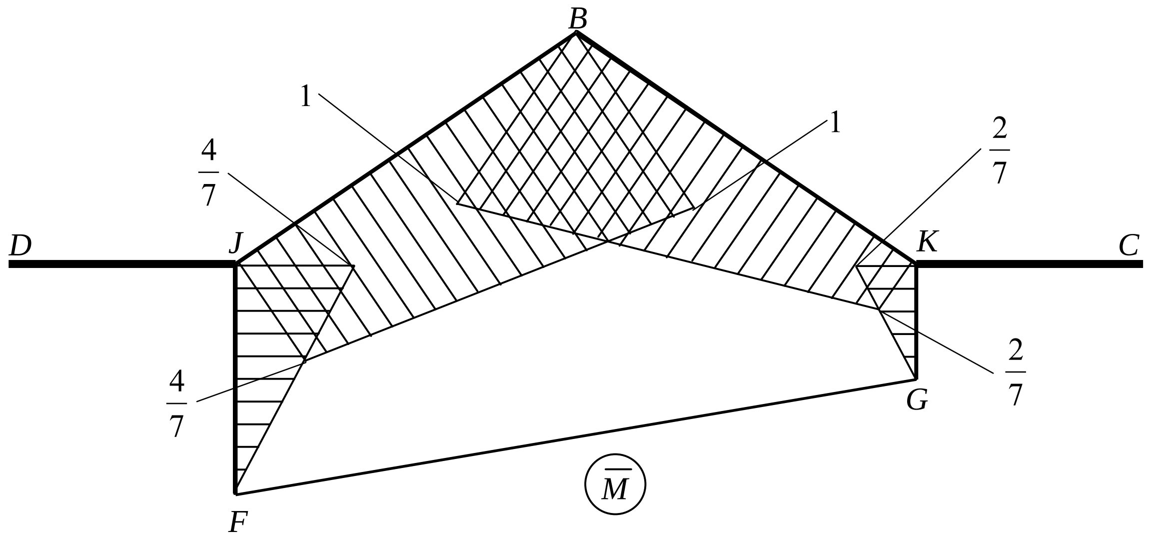
$$\sum_i P_{iy}^p = 0: \qquad \overline{R}_C - \overline{V}_B - \overline{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_B = \frac{1}{21 \cdot l}.$$

Składowe siły w ściągu $\overline{S}$ wynoszą:

$$\overline{S}_y = \overline{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} = -\frac{1}{21 \cdot l} \qquad \qquad \overline{S}_x = \overline{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} = -\frac{2}{7 \cdot l}$$



Wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego jest następujący:



Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczymy wzajemną zmianę kąta w punkcie B.

$$\Delta\varphi_B = \int_s \left(\frac{\overline{M}\,M}{EI} + \frac{\overline{N}\,N}{EA} \right) ds$$

Całkowanie możemy wykonać sposobem Wereszczagina.

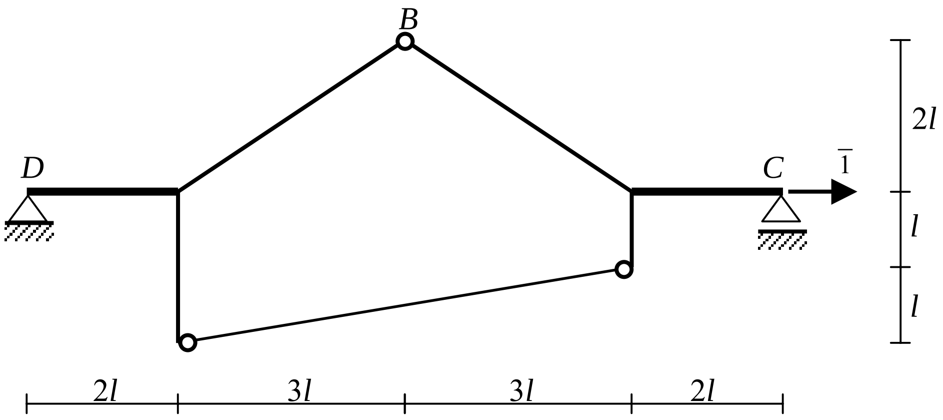
$$\Delta\varphi_B = \underbrace{-\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}Pl\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}}_{FJ} + \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{35}Pl\cdot\sqrt{13}\,l\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot 1\right)}_{JB} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{35}Pl\cdot\sqrt{13}\,l\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 1\right)}_{BK} \underbrace{-\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}Pl\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}}_{KG} \underbrace{-\frac{1}{EA}\cdot\frac{\sqrt{37}}{14}P\cdot\sqrt{37}\,l\cdot\frac{\sqrt{37}}{21\cdot l}}_{FG} =$$

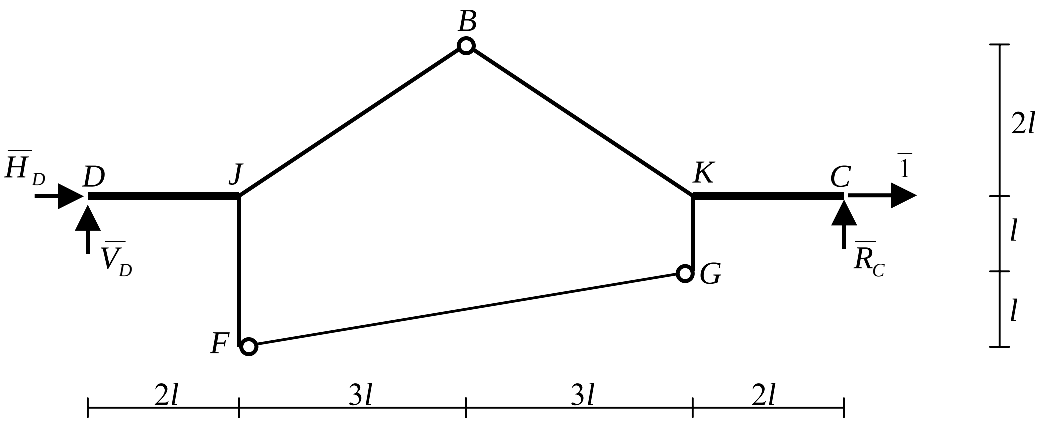
$$= \frac{117\cdot\sqrt{13}-180}{490}\cdot\frac{Pl^2}{EI} - \frac{37\cdot\sqrt{37}}{294}\cdot\frac{P}{EA} = 0{,}4936\cdot\frac{Pl^2}{EI} - 0{,}7655\cdot\frac{P}{EA}$$

<u>Wyznaczenie przemieszczenia punktu *C* - obciążenie jednostkowe</u>

Rozpatrywany układ należy obciążyć obciążeniem jednostkowym, stosownym do poszukiwanego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania przemieszczenia punktu *C*, należy do tego punktu przyłożyć siłę jednostkową o kierunku poszukiwanego przemieszczenia. W punkcie C występuje podpora przegubowa przesuwna, umożliwiająca jedynie przesuw w kierunku poziomym. Wynika stąd, że przemieszczenie punktu C ma tylko składową poziomą, czyli obciążenie jednostkowe stanowić będzie siła o kierunku poziomym i o wartości równej jeden. Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą *D*. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą *C*.



W punkcie D działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie C działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).



Z równania sumy momentów względem punktu D wyznaczymy reakcję $\overline{R}_C$.

$$\sum_i M_{iD} = 0: \qquad \overline{R}_C \cdot 10l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{R}_C = 0$$

Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową $\overline{V}_D$.

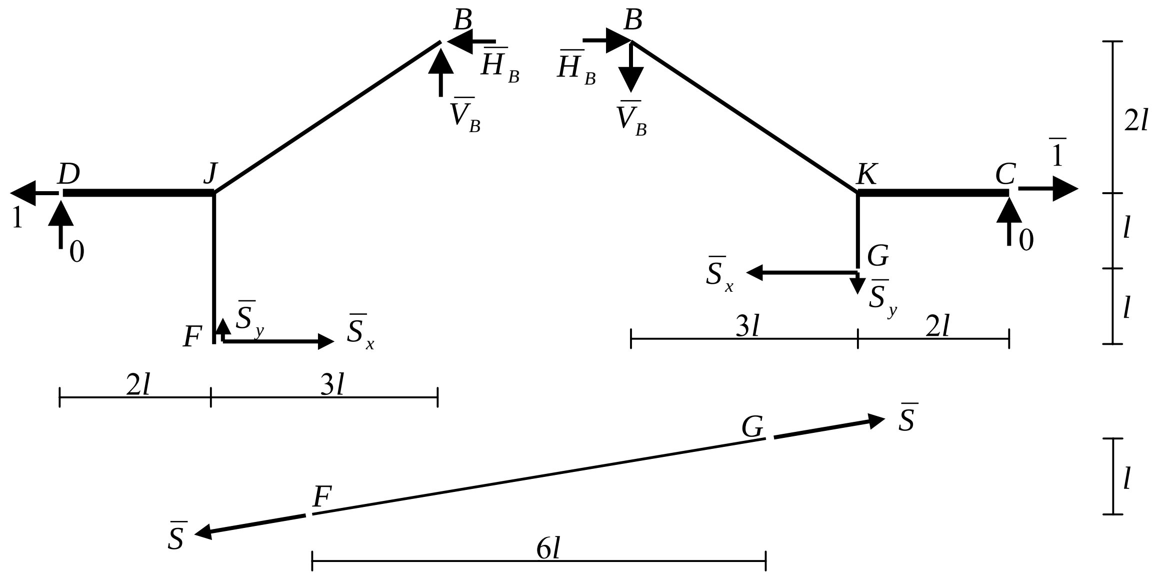
$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_D + \overline{R}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_D = 0$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą obliczymy składową $\overline{H}_D$.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_D + \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_D = -1$$

Przed sporządzeniem wykresu momentów gnących w rozpatrywanym układzie należy również wyznaczyć siłę w ściągu. W tym celu podzielimy układ na podukłady. Siłę w ściągu $\overline{S}$ oddziaływującą na lewy i prawy podukład zastąpimy dwiema składowymi: pionową $\overline{S}_y$ i poziomą $\overline{S}_x$. Są one równe:

$$\overline{S}_y = \overline{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} \qquad \qquad \overline{S}_x = \overline{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}}.$$



Siłę $\overline{S}$ wyznaczymy z równania sumy momentów względem punktu B dla prawego podukładu.

$$\sum_i M_{iB}^p = 0: \qquad \overline{R}_C \cdot 5l - \overline{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} \cdot 3l - \overline{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} \cdot 3l + \overline{1} \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{S} = \frac{2 \cdot \sqrt{37}}{21}$$

Wyznaczymy teraz oddziaływania w przegubie B, zapisując równania równowagi dla prawego podukładu. Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą ma postać:

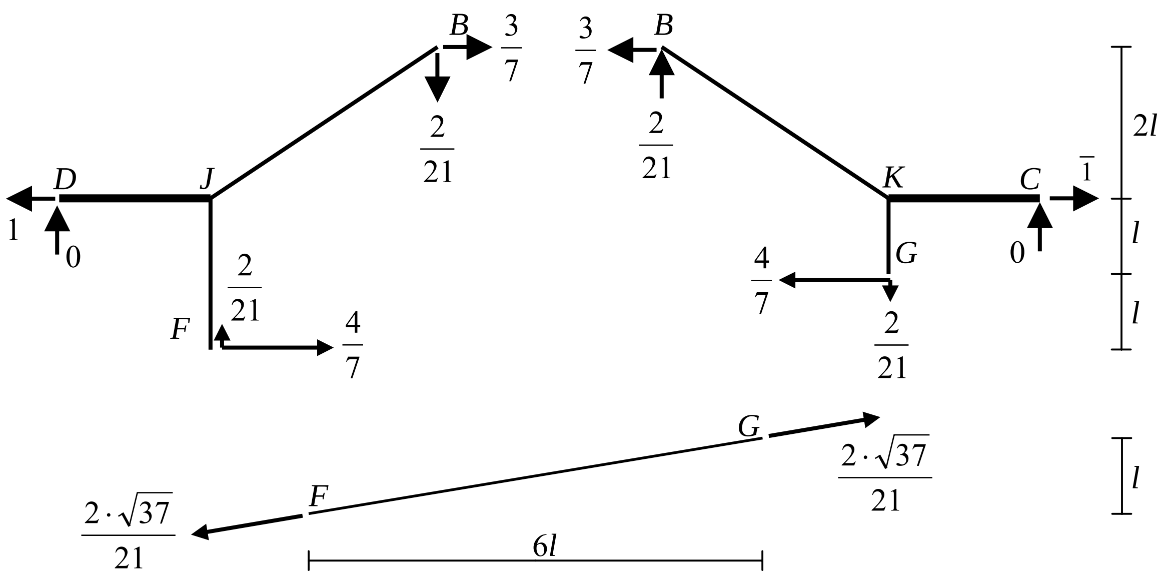
$$\sum_i P_{ix}^p = 0: \qquad \overline{1} + \overline{H}_B - \overline{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_B = -\frac{3}{7},$$

natomiast równanie sumy rzutów sił na oś pionową jest następujące:

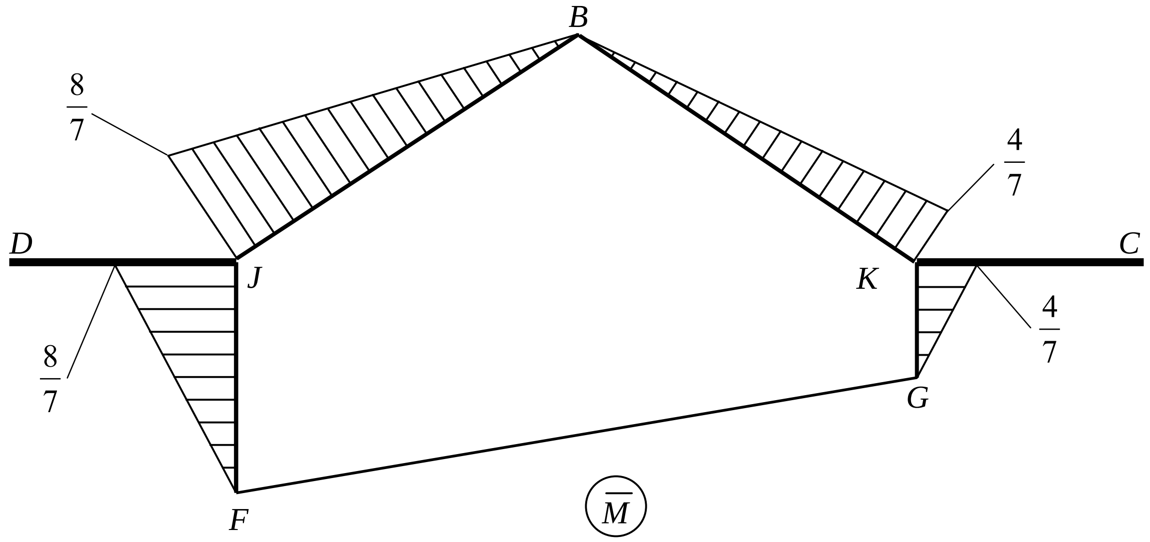
$$\sum_i P_{iy}^p = 0: \qquad \overline{R}_C - \overline{V}_B - \overline{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_B = -\frac{2}{21}.$$

Składowe siły w ściągu $\overline{S}$ wynoszą:

$$\overline{S}_y = \overline{S} \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} = \frac{2}{21} \qquad \overline{S}_x = \overline{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} = \frac{4}{7}$$



Wykres momentów gnących od obciążenia jednostkowego jest następujący:



mnożnik l

Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczymy przemieszczenie poziome punktu C.

$$\delta_C = \int_s \left(\frac{\overline{M}\,M}{EI} + \frac{\overline{N}\,N}{EA} \right) ds$$

Całkowanie możemy wykonać sposobem Wereszczagina.

$$\delta_C = \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}Pl\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{7}l}_{FJ} - \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{35}Pl\cdot\sqrt{13}\,l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{7}l}_{JB} - \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{35}Pl\cdot\sqrt{13}\,l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}l}_{BK} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}Pl\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}l}_{KG} + \underbrace{\frac{1}{EA}\cdot\frac{\sqrt{37}}{14}P\cdot\sqrt{37}\cdot l\cdot\frac{2\cdot\sqrt{37}}{21}}_{FG} = \frac{540-176\cdot\sqrt{13}}{735}\cdot\frac{Pl^3}{EI} + \frac{37\cdot\sqrt{37}}{147}\cdot\frac{Pl}{EA} =$$

$$= -0{,}1287\cdot\frac{Pl^3}{EI} + 1{,}5310\cdot\frac{Pl}{EA}$$