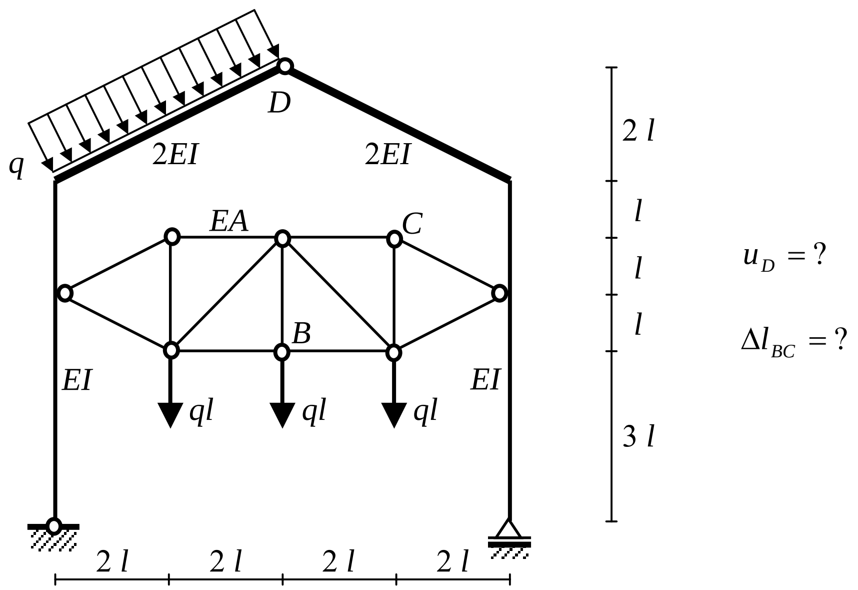
Przykład 3.5. Rama ze skratowaniem

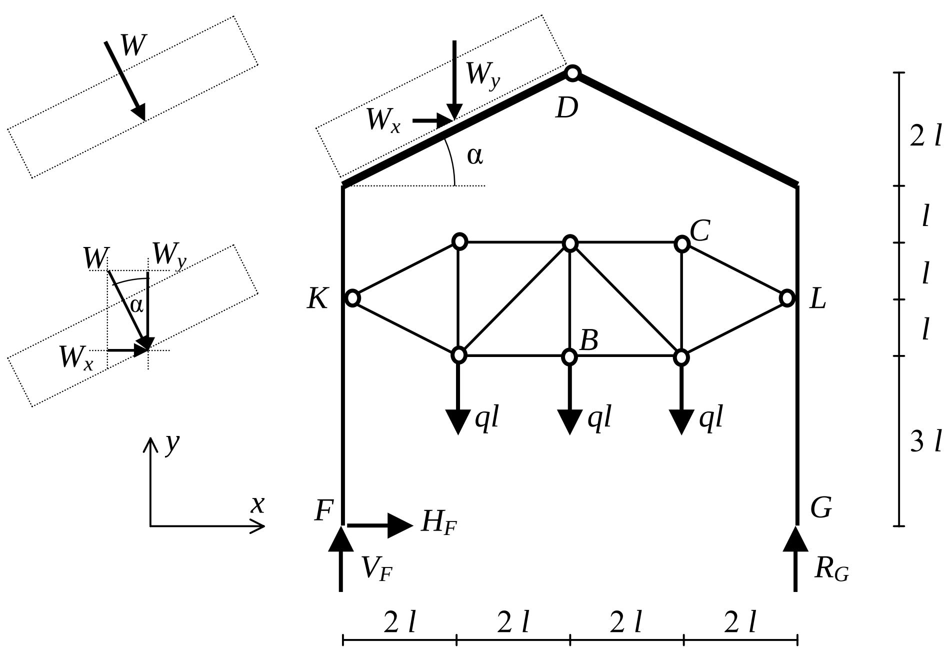
Polecenie: Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra wyznaczyć składową poziomą przemieszczenia w punkcie D oraz zmianę odległości między punktami B i C w poniższym układzie. Przyjąć sztywność ściskania jednakową dla wszystkich prętów skratowania $EA = \text{const}$. Pominąć wpływ sił normalnych w części „ramowej" układu.



W celu wyznaczenia przemieszczenia z wykorzystaniem wzoru Maxwella-Mohra należy wykonać wykresy momentów gnących i wyznaczyć siły w skratowaniu od obciążenia rzeczywistego i jednostkowego.

Obciążenie rzeczywiste

Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów i wyznaczenia sił podłużnych w skratowaniu, wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą F. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą G.



W punkcie F działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie G działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu). W celu uproszczenia zapisu równań równowagi obciążenie ciągłe zastąpimy wypadkową W, którą następnie rozłożymy na składowe: pionową W_y i poziomą W_x.

$$W = q \cdot \sqrt{20}\, l = 2\sqrt{5}\, ql \qquad W_y = W \cdot \cos\alpha \qquad W_x = W \cdot \sin\alpha$$

Po uwzględnieniu wymiarów układu otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

stąd

$$W_y = 2 \cdot \sqrt{5}\, ql \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4\, ql \qquad W_x = 2 \cdot \sqrt{5}\, ql \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2\, ql$$

Z równania sumy momentów względem punktu F wyznaczymy reakcję R_G.

$$\sum_i M_{iF} = 0: \qquad R_G \cdot 8l - ql \cdot 2l - ql \cdot 4l - ql \cdot 6l - W_y \cdot 2l - W_x \cdot 7l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_G = \frac{17}{4} ql$$

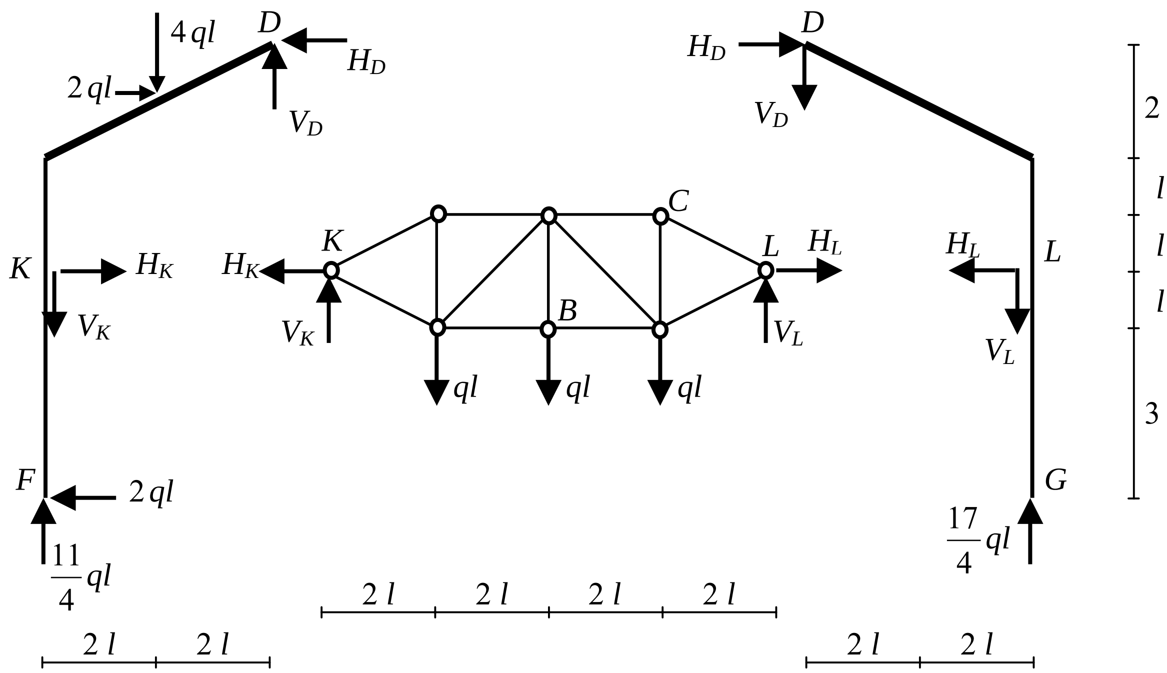
Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową V_F.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad V_F + R_G - ql - ql - ql - 4\, ql = 0 \quad \Rightarrow \quad V_F = \frac{11}{4} ql$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą wyznaczymy składową H_F.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad H_F + 2\, ql = 0 \quad \Rightarrow \quad H_F = -2\, ql$$

Wprowadzamy oznaczenia literami K i L dla połączeń skratowania z lewym i prawym słupem. Przed sporządzeniem wykresu momentów należy wyznaczyć oddziaływania w tych połączeniach oraz w przegubie D. W tym celu dzielimy układ na podukłady.



Skratowanie ma budowę symetryczną i jest obciążone obciążeniem o charakterze symetrycznym, a więc oddziaływania pionowe V_K i V_L są sobie równe:

$$V_K = V_L$$

Jednocześnie oddziaływania te muszą spełniać równanie sumy rzutów sił na oś pionową dla skratowania.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad V_K + V_L - ql - ql - ql = 0 \quad \Rightarrow \quad V_K = V_L = \frac{3}{2} ql$$

W celu wyznaczenia oddziaływania poziomego w punkcie L zapiszemy równanie sumy momentów względem punktu D dla prawego podukładu.

$$\sum_i M_{iD}^{p} = 0: \qquad R_G \cdot 4l - V_L \cdot 4l - H_L \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow \quad H_L = \frac{11}{4} ql$$

Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą zapisane dla skratowania ma postać:

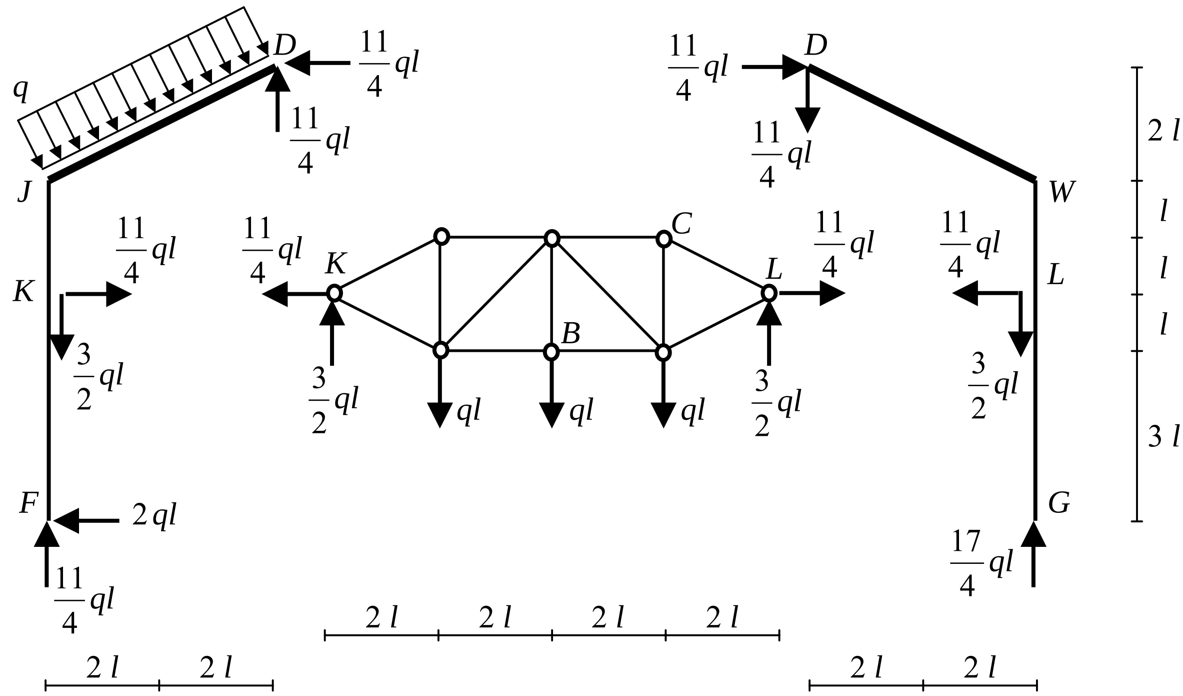
$$\sum P_{ix} = 0: \qquad H_L - H_K = 0 \quad \Rightarrow \quad H_K = \frac{11}{4} ql$$

Oddziaływanie pionowe w punkcie D wyznaczymy z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla prawego podukładu.

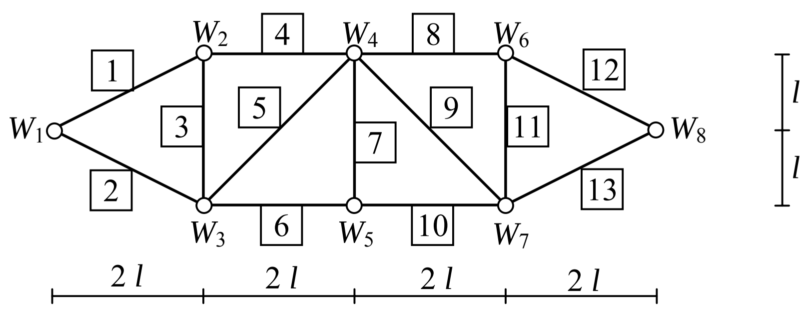
$$\sum_i P_{iy}^{p} = 0: \qquad R_G - V_L - V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = \frac{11}{4} ql$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla prawego podukładu obliczymy wartość oddziaływania poziomego w punkcie D.

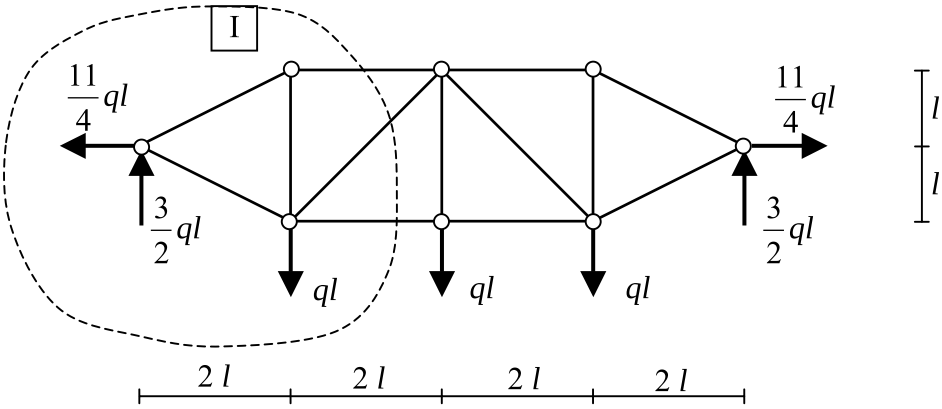
$$\sum_i P_{ix}^{p} = 0: \qquad H_D - H_L = 0 \quad \Rightarrow \quad H_D = \frac{11}{4} ql$$



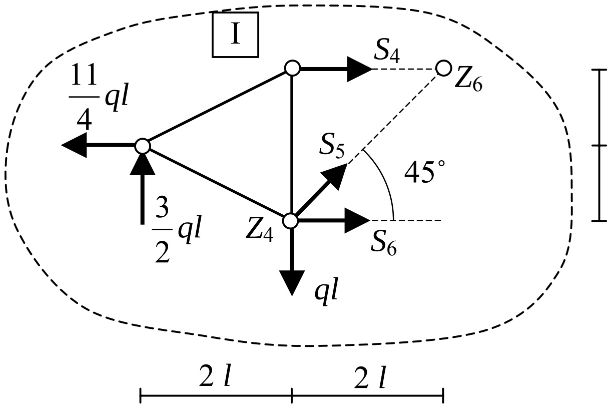
Znając oddziaływania w przegubach K i L przystąpimy do wyznaczenia sił podłużnych w prętach skratowania. Ponumerujemy te pręty i węzły zgodnie z poniższym rysunkiem.



W związku z symetryczną budową i obciążeniem możemy ograniczyć się do wyznaczenia sił w połowie skratowania.



Zapiszemy równania równowagi dla części I skratowania.



Równanie sumy momentów względem punktu Z_4 dla części I ma postać:

$$\sum_i M^I_{iZ_4} = 0: \qquad \frac{11}{4}ql \cdot l - \frac{3}{2}ql \cdot 2l - S_4 \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad S_4 = -\frac{1}{8}ql$$

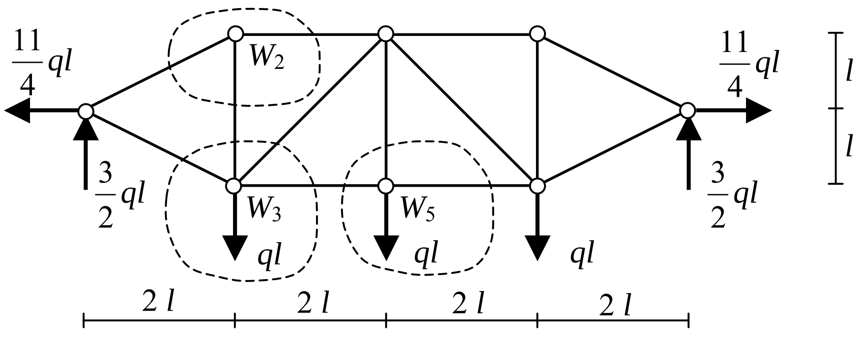
Równanie sumy momentów względem punktu Z_6 dla części I ma postać:

$$\sum_i M^I_{iZ_6} = 0: \qquad S_6 \cdot 2l - \frac{11}{4}ql \cdot l - \frac{3}{2}ql \cdot 4l + ql \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad S_6 = \frac{27}{8}ql$$

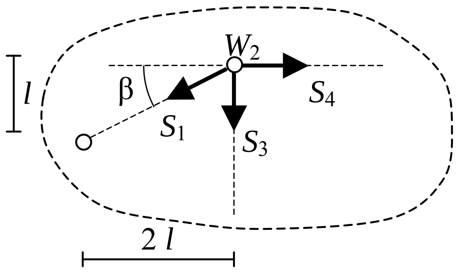
Równanie sumy rzutów sił na oś pionową dla części I ma postać:

$$\sum_i P^I_{iy} = 0: \qquad S_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}ql - ql = 0 \quad \Rightarrow \quad S_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}ql$$

Pozostałe siły wyznaczymy korzystając z równań równowagi dla węzłów skratowania.



Siłę S_1 obliczymy korzystając z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla węzła W_2.



$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

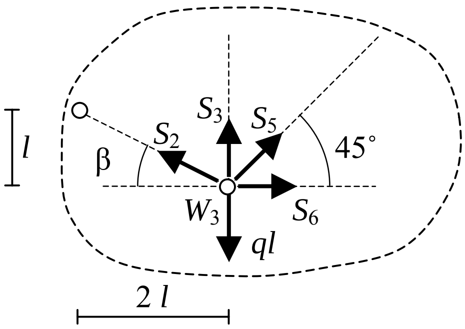
$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_2} = 0: \qquad S_4 - S_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = -\frac{\sqrt{5}}{16} ql$$

Podobnie siłę S_2 wyznaczymy korzystając z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla węzła W_2.

$$\sum_i P_{iy}^{W_2} = 0: \qquad -S_3 - S_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{1}{16} ql$$

Siłę S_2 obliczymy korzystając z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla węzła W_3.

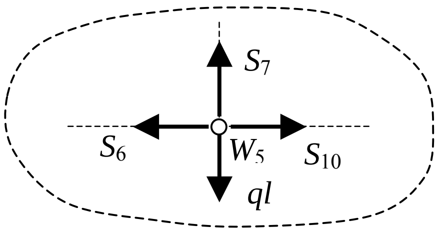


$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_3} = 0: \qquad S_6 + S_5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - S_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{23 \cdot \sqrt{5}}{16} ql$$

W celu wyznaczenia siły S_7 wykorzystamy równanie sumy rzutów sił na oś pionową, zapisanego dla węzła W_5 skratowania.



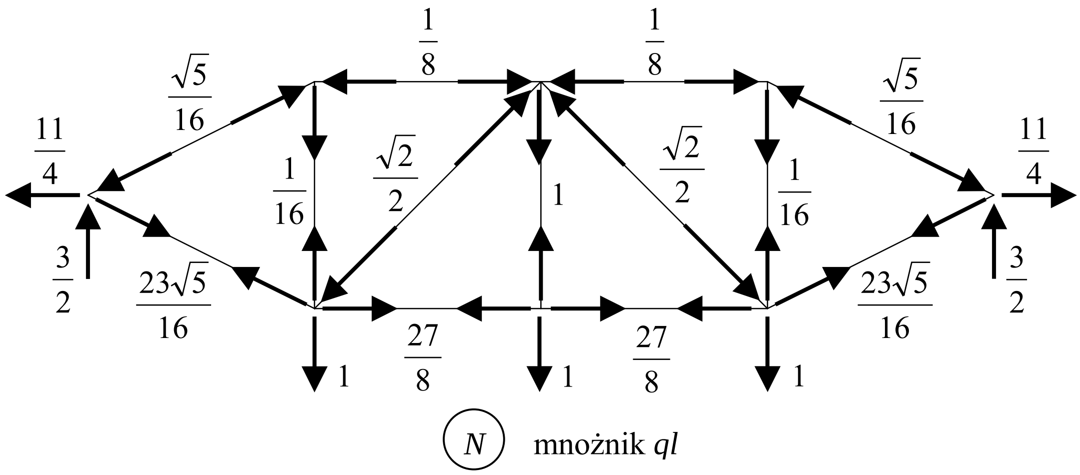
$$\sum_i P_{iy}^{W_5} = 0: \qquad S_7 - ql = 0 \quad \Rightarrow \quad S_7 = ql$$

Wartości pozostałych sił podłużnych w prętach skratowania określimy wykorzystując symetrię.

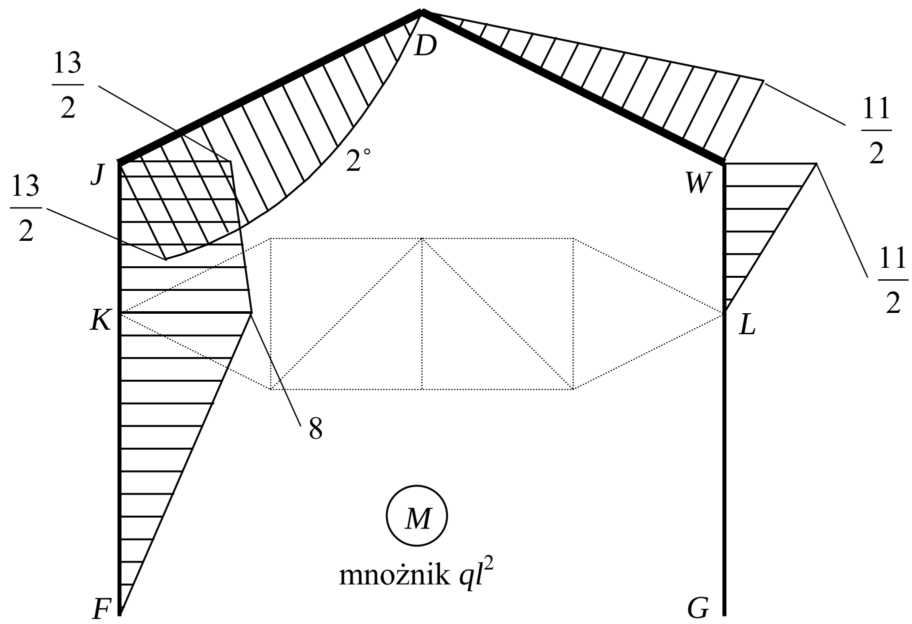
$$S_8 = S_4 = -\frac{1}{8} ql, \qquad S_9 = S_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} ql, \qquad S_{10} = S_6 = \frac{27}{8} ql,$$

$$S_{11} = S_3 = \frac{1}{16} ql, \qquad S_{12} = S_1 = -\frac{\sqrt{5}}{16} ql, \qquad S_{13} = S_2 = \frac{27 \cdot \sqrt{5}}{16} ql.$$

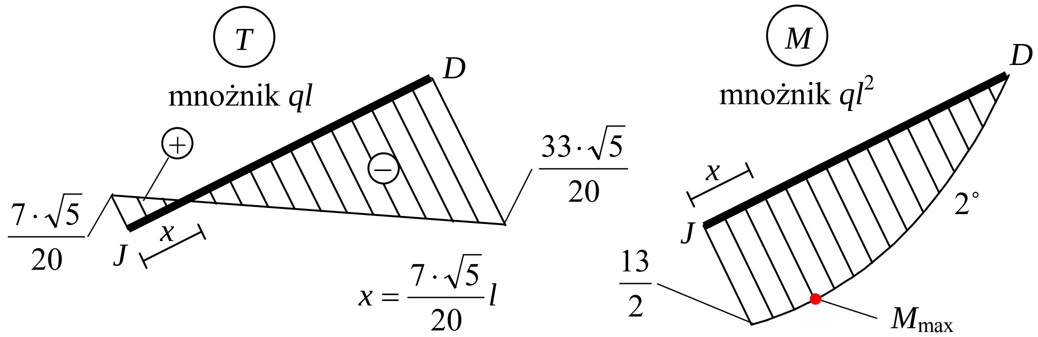
Poniższy rysunek przedstawia wyznaczone siły podłużne na schemacie skratowania.



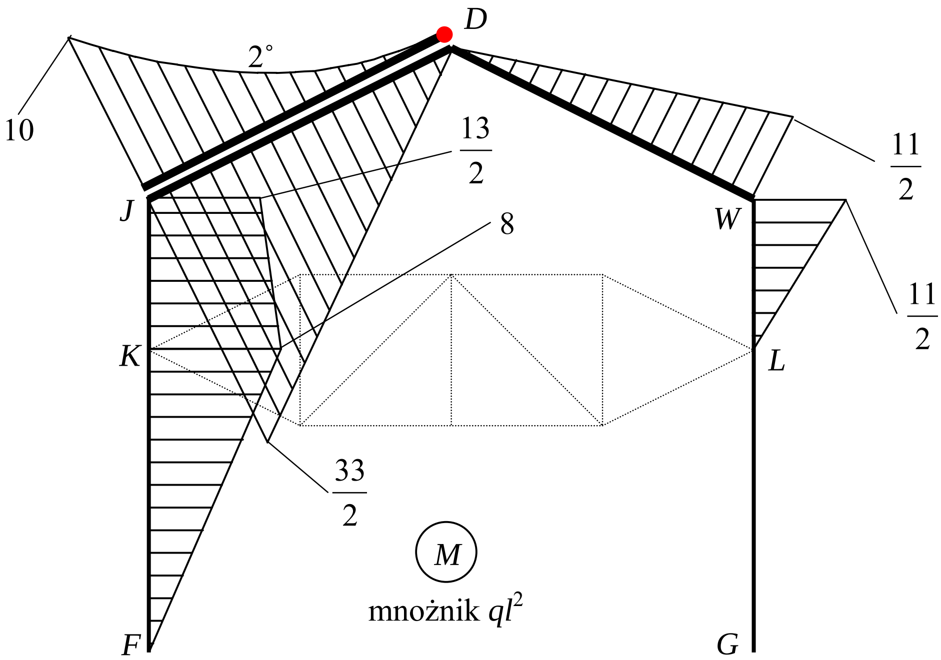
Należy również wykonać wykres momentów gnących dla ramy.



Dla pręta obciążonego obciążeniem ciągłym wykonamy dodatkowo wykres sił poprzecznych.

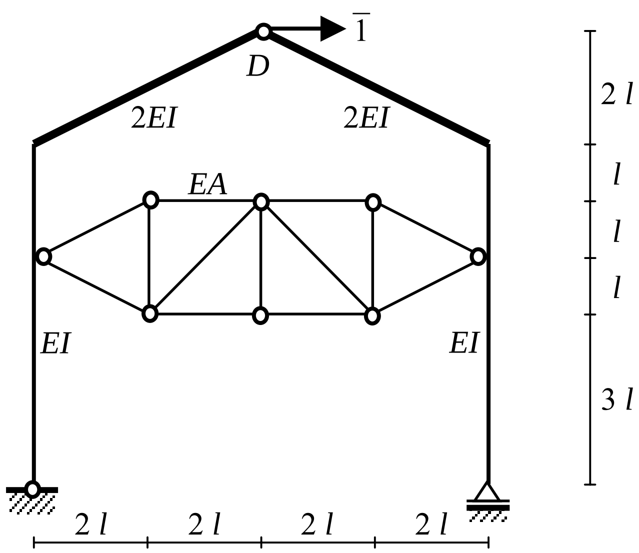


Z wykresu sił poprzecznych wykonanego dla pręta ($J÷D$) wynika, że siła poprzeczna jest różna od zera w przekroju w punkcie J, D oraz w połowie odcinka JD. Przed przystąpieniem do wyznaczenia przemieszczenia za pomocą sposobu Wereszczagina, należy wykres momentów w tym przedziale przedstawić jako sumę takich wykresów, dla których znane jest pole wykresu oraz odcięta środka ciężkości. Miejsce występowania wierzchołka na wykresie parabolicznym oznaczone jest kolorem czerwonym.

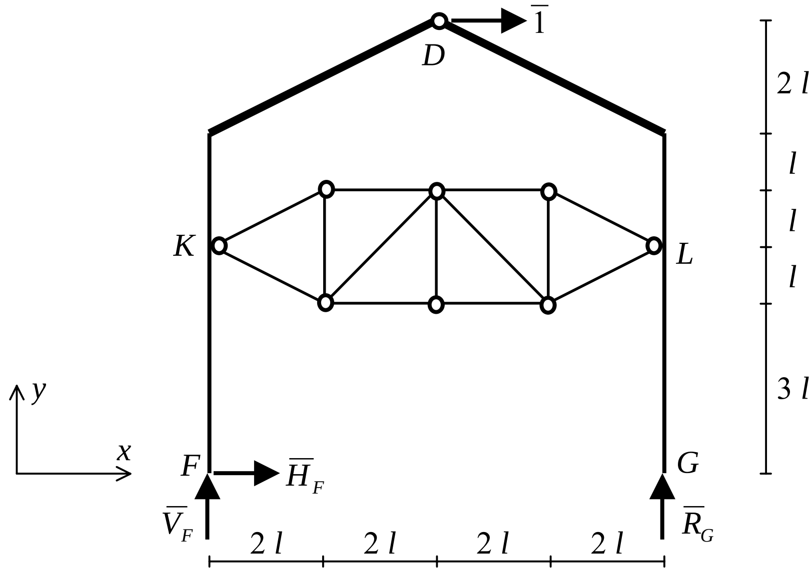


<u>Wyznaczenie składowej poziomej przemieszczenia punktu *D* - obciążenie jednostkowe</u>

Rozpatrywany układ należy obciążyć obciążeniem jednostkowym, stosownym do poszukiwanego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania składowej poziomej przemieszczenia punktu D, należy do tego punktu przyłożyć siłę jednostkową o kierunku poziomym.



Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów i wyznaczenia sił podłużnych w skratowaniu, wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą *F*. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą *G*.



W punkcie *F* działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie *G* działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).

Z równania sumy momentów względem punktu *F* wyznaczymy reakcję $\overline{R}_G$.

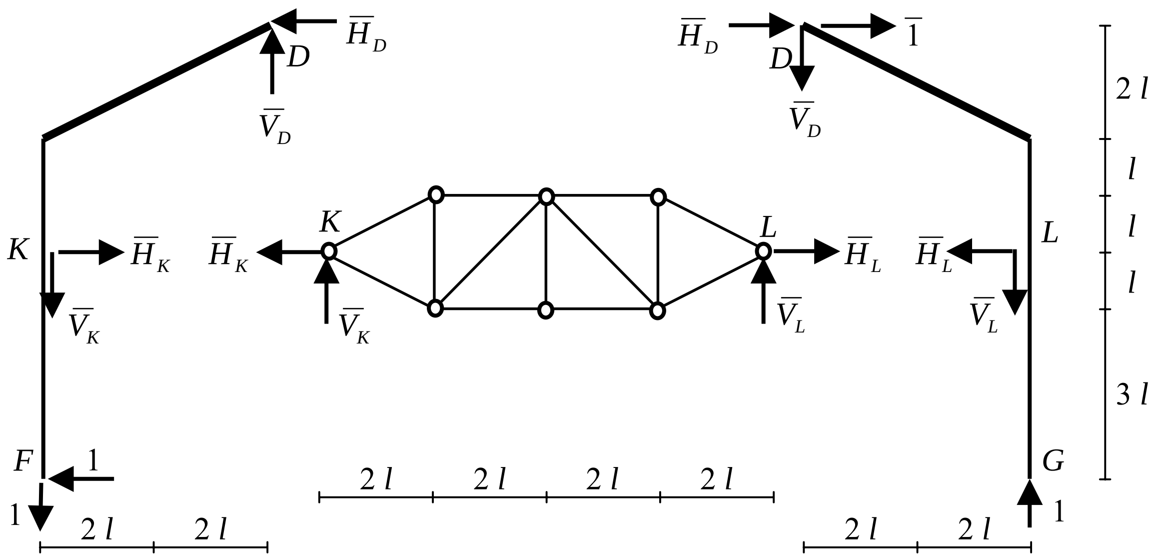
$$\sum_i M_{iF} = 0: \qquad \overline{R}_G \cdot 8l - \overline{1} \cdot 8l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{R}_G = 1$$

Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową $\overline{V}_F$.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_F + \overline{R}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_F = -1$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą wyznaczymy składową $\overline{H}_F$.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_F + \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_F = -1$$



Wprowadzamy oznaczenia literami K i L dla połączeń skratowania z lewym i prawym słupem. Przed sporządzeniem wykresu momentów należy wyznaczyć oddziaływania w tych połączeniach oraz w przegubie D. W tym celu dzielimy układ na podukłady.

Równanie sumy momentów względem punktu K dla skratowania jest następujące:

$$\sum_i M_{iK} = 0: \qquad \overline{V}_L \cdot 8l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_L = 0$$

Równanie sumy rzutów sił na oś pionową dla skratowania ma postać:

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_K + \overline{V}_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_K = 0$$

W celu wyznaczenia oddziaływania poziomego w punkcie L zapiszemy równanie sumy momentów względem punktu D dla prawego podukładu.

$$\sum_i M_{iD}^{p} = 0: \qquad \overline{R}_G \cdot 4l - \overline{V}_L \cdot 4l - \overline{H}_L \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_L = 1$$

Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą zapisane dla skratowania ma postać:

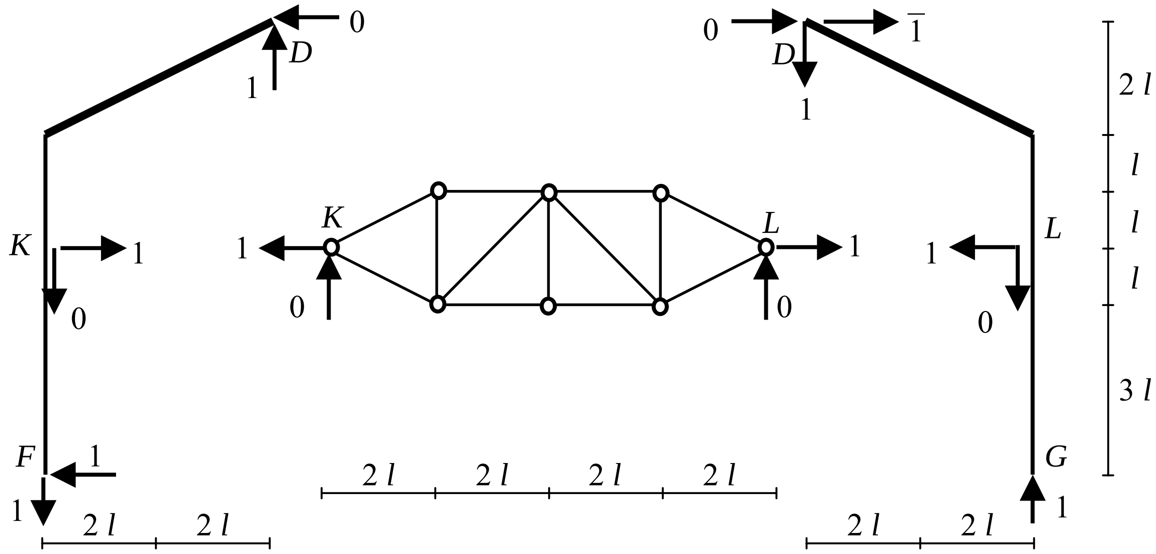
$$\sum P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_L - \overline{H}_K = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_K = 1$$

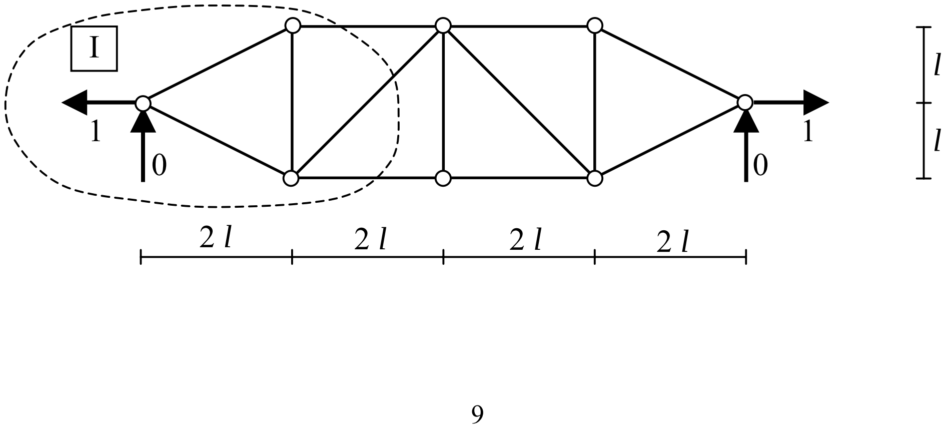
Oddziaływanie pionowe w punkcie D wyznaczymy z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla prawego podukładu.

$$\sum_i P_{iy}^{p} = 0: \qquad \overline{R}_G - \overline{V}_L - \overline{V}_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_D = 1$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla prawego podukładu obliczymy wartość oddziaływania poziomego w punkcie D.

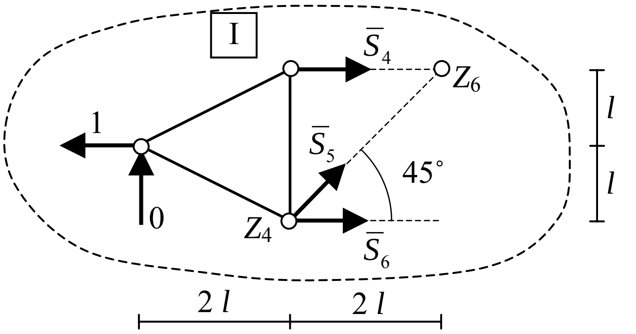
$$\sum_i P_{ix}^{p} = 0: \qquad \overline{H}_D - \overline{H}_L + \overline{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_D = 0$$





Znając oddziaływania w przegubach K i L przystąpimy do wyznaczenia sił podłużnych w prętach skratowania. W związku z symetryczną budową i obciążeniem możemy ograniczyć się do wyznaczenia sił w połowie skratowania.

Zapiszemy równania równowagi dla części I skratowania.



Równanie sumy momentów względem punktu Z_4 dla części I ma postać:

$$\sum_i M^I_{iZ_4} = 0: \qquad \bar{1} \cdot l - \bar{S}_4 \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_4 = \frac{1}{2}$$

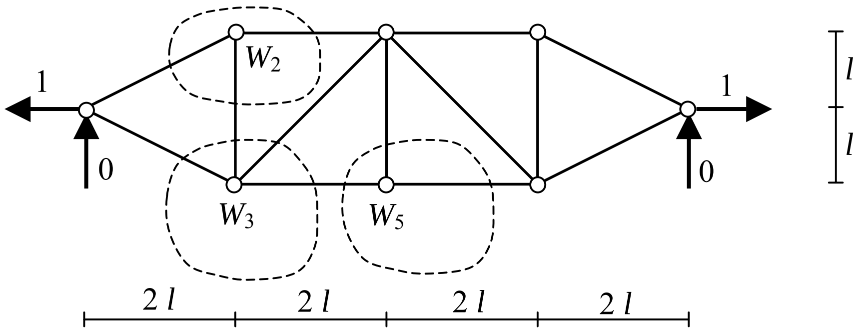
Równanie sumy momentów względem punktu Z_6 dla części I ma postać:

$$\sum_i M^I_{iZ_6} = 0: \qquad \bar{S}_6 \cdot 2l - 1 \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_6 = \frac{1}{2}$$

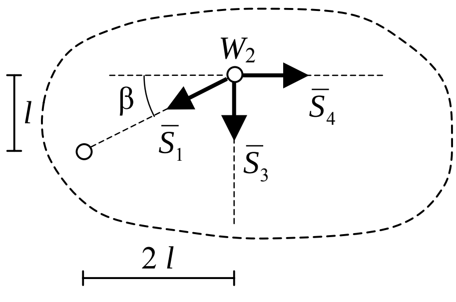
Równanie sumy rzutów sił na oś pionową dla części I ma postać:

$$\sum_i P^I_{iy} = 0: \qquad \bar{S}_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_5 = 0$$

Pozostałe siły wyznaczymy korzystając z równań równowagi dla węzłów skratowania.



Siłę $\bar{S}_1$ obliczymy korzystając z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla węzła W_2.



$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

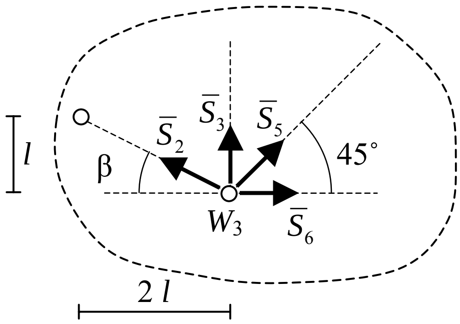
$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_2} = 0: \qquad \bar{S}_4 - \bar{S}_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_1 = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Podobnie siłę $\bar{S}_3$ wyznaczymy korzystając z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla węzła W_2.

$$\sum_i P_{iy}^{W_2} = 0: \qquad -\bar{S}_3 - \bar{S}_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_3 = -\frac{1}{4}$$

Siłę S_2 obliczymy korzystając z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla węzła W_3.

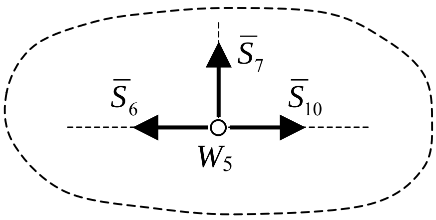


$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_3} = 0: \qquad \bar{S}_6 + \bar{S}_5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \bar{S}_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_2 = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

W celu wyznaczenia siły $\bar{S}_7$ wykorzystamy równanie sumy rzutów sił na oś pionową dla węzła W_5 skratowania.

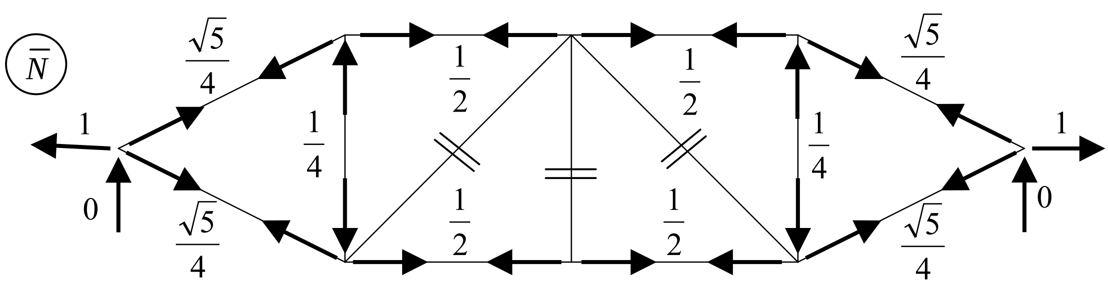


$$\sum_i P_{iy}^{IV} = 0: \qquad \bar{S}_7 = 0$$

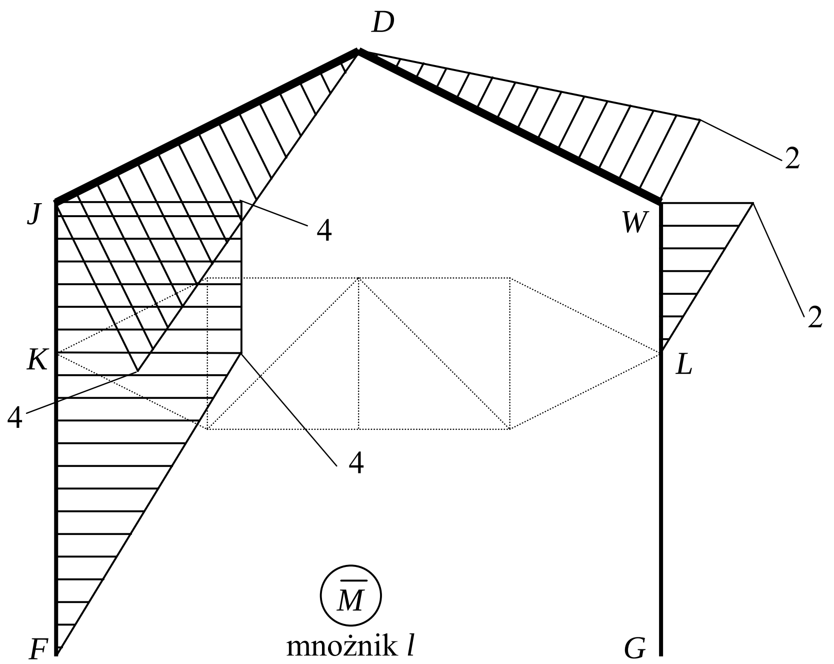
Wartości pozostałych sił podłużnych w prętach skratowania określimy wykorzystując symetrię.

$$\bar{S}_8 = \bar{S}_4 = \frac{1}{2}, \qquad \bar{S}_9 = \bar{S}_5 = 0, \qquad \bar{S}_{10} = \bar{S}_6 = \frac{1}{2},$$

$$\bar{S}_{11} = \bar{S}_3 = -\frac{1}{4}, \qquad \bar{S}_{12} = \bar{S}_1 = \frac{\sqrt{5}}{4}, \qquad \bar{S}_{13} = \bar{S}_2 = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$



Powyższy rysunek przedstawia wyznaczone siły podłużne naniesione na schemat skratowania. Należy również wykonać wykres momentów gnących dla ramy.



Składową poziomą przemieszczenia punktu D wyznaczymy korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra.

$$u_D = \int_s \left(\frac{\overline{M}\,M}{EI} + \frac{\overline{N}\,N}{EA} \right) ds = \int_s \frac{\overline{M}\,M}{EI}\,ds + \int_s \frac{\overline{N}\,N}{EA}\,ds\,.$$

Wyznaczenie wartości drugiej całki uprości się, jeżeli uwzględnimy symetryczny rozkład sił podłużnych w skratowaniu, zarówno od obciążenia rzeczywistego jak i jednostkowego. Całkowanie możemy przeprowadzić dla połowy prętów skratowania (z wyłączeniem pręta nr 7), a wynik pomnożyć przez dwa. Następnie należy dodać całkę obliczoną dla pręta leżącego na osi symetrii, która w rozpatrywanym zadaniu równa jest zero.

$$u_D = \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8ql^2\cdot 4l\cdot\frac{2}{3}\cdot 4l}_{FK} + \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(8ql^2+\frac{13}{2}ql^2\right)\cdot 2l\cdot 4l}_{KJ} + \underbrace{\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{2}ql^2\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l}_{WL} +$$

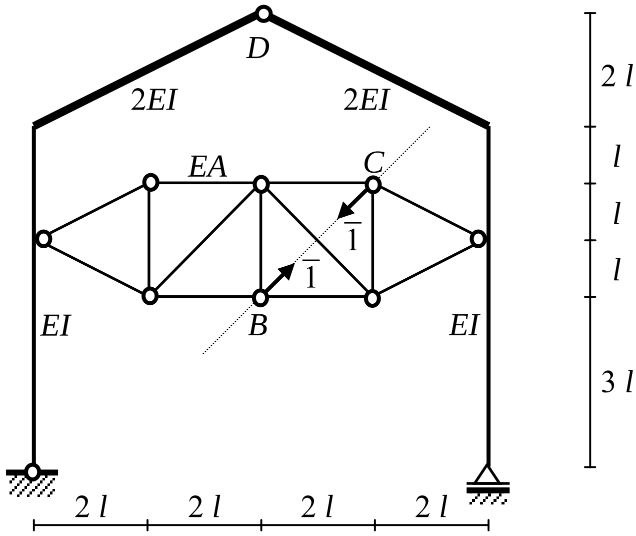
$$+\underbrace{\frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{33}{2}ql^2\cdot 2\sqrt{5}\,l\cdot\frac{2}{3}\cdot 4l - \frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot 10\,ql^2\cdot 2\sqrt{5}\,l\cdot\frac{3}{4}\cdot 4l}_{JD} + \underbrace{\frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{2}ql^2\cdot 2\sqrt{5}\,l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l}_{DW} +$$

$$+2\cdot\frac{1}{EA}\left(\underbrace{-\frac{\sqrt{5}}{16}ql\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{5}\,l}_{1} + \underbrace{\frac{23\sqrt{5}}{16}ql\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{5}\,l}_{2} \underbrace{-\frac{1}{16}ql\cdot\frac{1}{4}\cdot 2l}_{3} \underbrace{-\frac{1}{8}ql\cdot\frac{1}{2}\cdot 2l}_{4} + \underbrace{\frac{27}{8}ql\cdot\frac{1}{2}\cdot 2l}_{6}\right) =$$

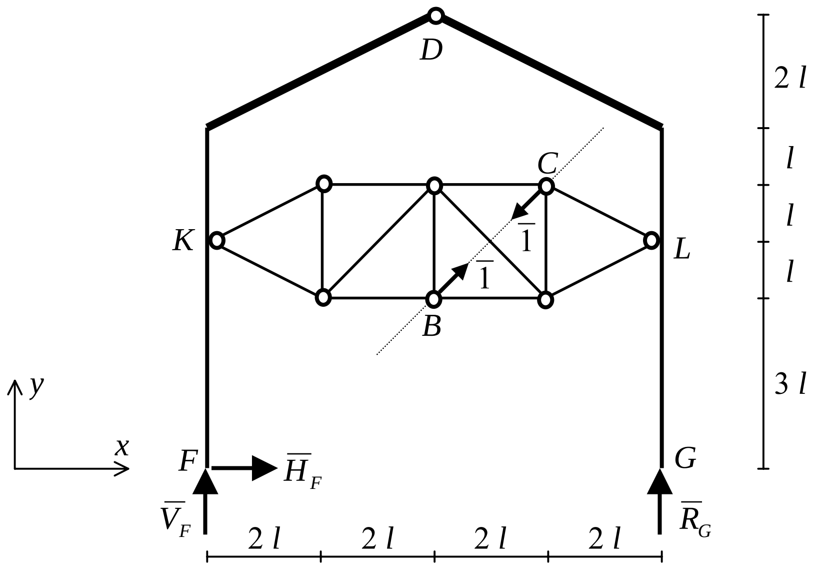
$$= \frac{324+47\cdot\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{ql^4}{EI} + \frac{103+55\cdot\sqrt{5}}{16}\cdot\frac{ql^2}{EA} \cong 143{,}0317\cdot\frac{ql^4}{EI} + 14{,}1240\cdot\frac{ql^2}{EA}$$

Wyznaczenie zmiany odległości między punktami *B* i *C*- obciążenie jednostkowe

Rozpatrywany układ należy obciążyć obciążeniem jednostkowym, stosownym do poszukiwanego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania zmiany odległości między punktami *B* i *C* będą to dwie siły jednostkowe o kierunku prostej przechodzącej przez te punkty i o przeciwnych zwrotach.



Przed przystąpieniem do sporządzenia wykresu momentów i wyznaczenia sił podłużnych w skratowaniu, wyznaczymy reakcje podporowe. Oswobodzimy układ od więzów, zastępując podpory reakcjami. Podpora z lewej strony jest podporą przegubową nieprzesuwną. Oznaczmy ją literą *F*. Prawa podpora jest podporą przegubową przesuwną. Oznaczmy ją literą *G*. W punkcie *F* działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa i pozioma, natomiast w punkcie *G* działa reakcja pionowa (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu).



Z równania sumy momentów względem punktu *F* wyznaczymy reakcję $\overline{R}_G$.

$$\sum_i M_{iF} = 0: \qquad \overline{R}_G \cdot 8l - \overline{1} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} + \overline{1} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{R}_G = 0$$

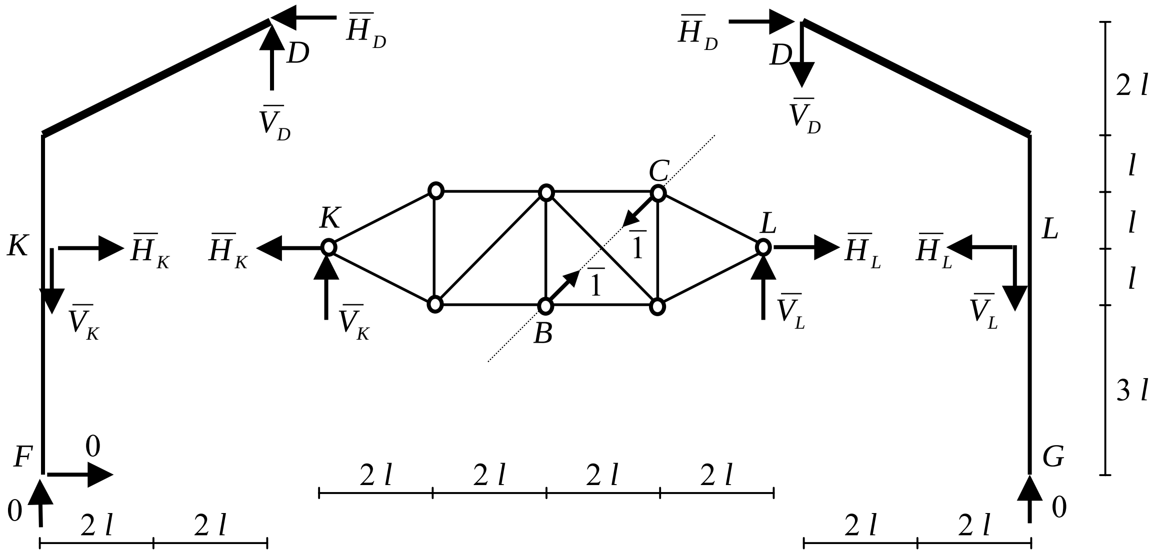
Z równania sumy rzutów sił na oś pionową obliczymy składową $\overline{V}_F$.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_F + \overline{R}_G + \overline{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \overline{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{V}_F = 0$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą wyznaczymy składową $\overline{H}_F$.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_F + \overline{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \overline{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{H}_F = 0$$

Wprowadzamy oznaczenia literami *K* i *L* dla połączeń skratowania z lewym i prawym słupem. Przed sporządzeniem wykresu momentów należy wyznaczyć oddziaływania w tych połączeniach oraz w przegubie *D*. W tym celu dzielimy układ na podukłady.



Równanie sumy momentów względem punktu *K* dla skratowania jest następujące:

$$\sum_i M_{iK} = 0: \qquad \overline{V}_L\cdot 8l + \overline{1}\cdot\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}l - \overline{1}\cdot\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}l = 0 \;\Rightarrow\; \overline{V}_L = 0$$

Równanie sumy rzutów sił na oś pionową dla skratowania ma postać:

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad \overline{V}_K + \overline{V}_L + \overline{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \overline{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{V}_K = 0$$

W celu wyznaczenia oddziaływania poziomego w punkcie *L* zapiszemy równanie sumy momentów względem punktu *D* dla prawego podukładu.

$$\sum_i M^{p}_{iD} = 0: \qquad \overline{R}_G\cdot 4l - \overline{V}_L\cdot 4l - \overline{H}_L\cdot 4l = 0 \;\Rightarrow\; \overline{H}_L = 0$$

Równanie sumy rzutów sił na oś poziomą zapisane dla skratowania ma postać:

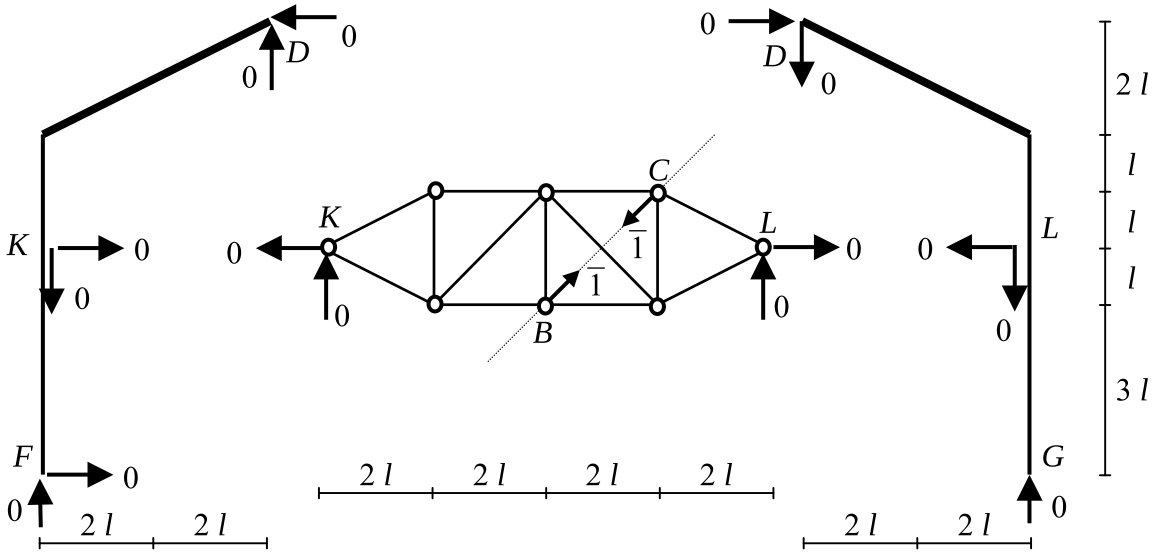
$$\sum P_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_L - \overline{H}_K + \overline{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \overline{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{H}_K = 0$$

Oddziaływanie pionowe w punkcie *D* wyznaczymy z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla prawego podukładu.

$$\sum_i P^{p}_{iy} = 0: \qquad \overline{R}_G - \overline{V}_L - \overline{V}_D = 0 \;\Rightarrow\; \overline{V}_D = 0$$

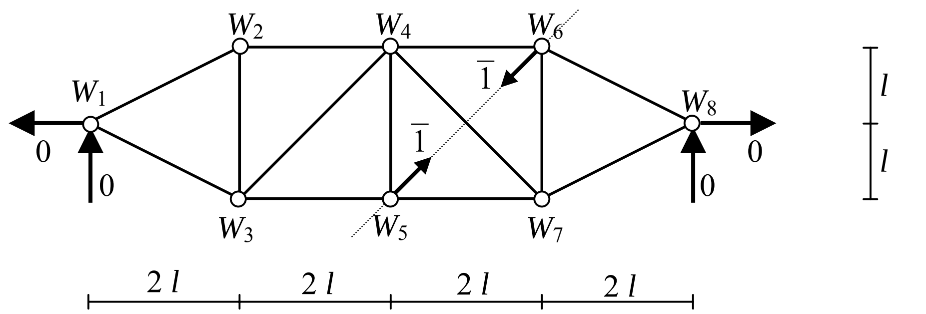
Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla prawego podukładu obliczymy wartość oddziaływania poziomego w punkcie *D*.

$$\sum_i P^{p}_{ix} = 0: \qquad \overline{H}_D - \overline{H}_L = 0 \;\Rightarrow\; \overline{H}_D = 0$$



Rzędne wykresu momentów od obciążenia jednostkowego we wszystkich przekrojach rozpatrywanego układu są równe zero.

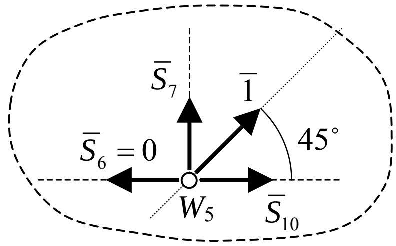
Znając oddziaływania w przegubach *K* i *L* przystąpimy do wyznaczenia sił podłużnych w prętach skratowania, którego węzły oznaczymy zgodnie z poniższym rysunkiem.



Łatwo zauważyć, że jeżeli zapiszemy dla każdego z węzłów W_1, W_2 i W_3 (w tej kolejności) równania rzutów sił na oś pionową i poziomą, to za każdym razem otrzymamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi z zerowymi wyrazami wolnymi. Otrzymamy zatem zerowe rozwiązania. Dotyczy to również węzła W_8. Oznacza to, że:

$$\overline{S}_1 = \overline{S}_2 = \overline{S}_3 = \overline{S}_4 = \overline{S}_5 = \overline{S}_6 = \overline{S}_{12} = \overline{S}_{13} = 0$$

Pozostałe siły wyznaczymy zapisując równania sumy rzutów sił dla węzłów W_5, W_4 i W_7.

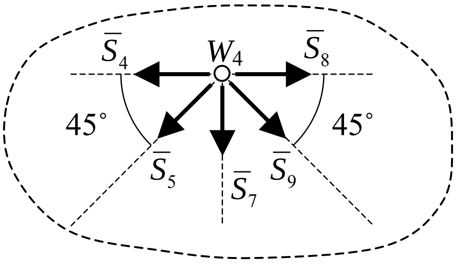


Z równania rzutów sił na oś pionową dla węzła W_5 wyznaczymy siłę $\overline{S}_7$.

$$\sum_i P_{iy}^{W_5} = 0: \qquad \overline{S}_7 + \overline{1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{S}_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla węzła W_5 wyznaczymy siłę $\overline{S}_{10}$.

$$\sum_i P_{ix}^{W_5} = 0: \qquad \overline{S}_{10} - \overline{S}_6 + \overline{1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{S}_{10} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\overline{S}_4 = 0$$

$$\overline{S}_5 = 0$$

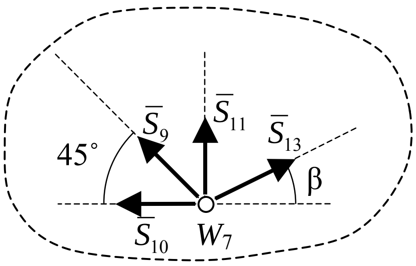
$$\overline{S}_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla węzła W_4 obliczymy siłę $\overline{S}_9$.

$$\sum_i P_{iy}^{W_4} = 0: \qquad -\overline{S}_7 - \overline{S}_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \overline{S}_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{S}_9 = 1$$

Z równania sumy rzutów sił na oś poziomą dla węzła W_5 wyznaczymy siłę $\overline{S}_8$.

$$\sum_i P_{ix}^{W_4} = 0: \qquad \overline{S}_8 + \overline{S}_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \overline{S}_4 - \overline{S}_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{S}_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



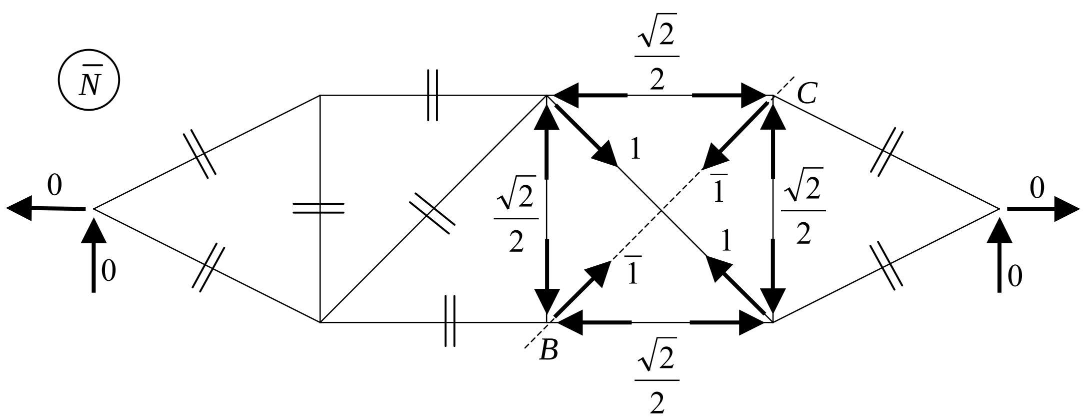
$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{S}_9 = 1 \qquad \overline{S}_{10} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \overline{S}_{13} = 0$$

Siłę $\overline{S}_{11}$ obliczymy z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla węzła W_7.

$$\sum_i P_{iy}^{W_7} = 0: \qquad \overline{S}_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \overline{S}_{11} + \overline{S}_{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{S}_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Poniższy rysunek przedstawia wyznaczone siły podłużne naniesione na schemat skratowania.



Całkowanie przeprowadzimy tylko dla pięciu prętów skratowania, w których działają niezerowe siły podłużne.

$$\Delta l_{BC} = \int_s \frac{\overline{M}\, M}{EI} ds + \int_s \frac{\overline{N}\, N}{EA} ds$$

Pierwsza całka ma wartość równą zero. Uwzględniając stałą i jednakową dla wszystkich prętów skratowania sztywność ściskania otrzymamy

$$\Delta l_{BC} = \frac{1}{EA} \cdot \left(\underbrace{-ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l}_{7} + \underbrace{\frac{1}{8} ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l}_{8} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} ql \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2}\, l}_{9} - \underbrace{\frac{27}{8} ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l}_{10} - \underbrace{\frac{1}{16} ql \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l}_{11} \right) =$$

$$= -\frac{32 + 69 \cdot \sqrt{2}}{16} \cdot \frac{ql^2}{EA} \cong -8{,}0988 \cdot \frac{ql^2}{EA}$$

Ujemna wartość obliczonego przemieszczenia oznacza, że punkty *B* i *C* oddalą się od siebie.
Przyjmiemy następujące dane:

- współczynnik sprężystości podłużnej dla stali: E = 205 GPa (wg PN-90/B-03200: *Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie*)

- moment bezwładności dla dwuteownika 400: I = 29210 cm^4 (wg W. Bogucki, M. Żyburtowicz *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych,*Wyd. 5, Warszawa 1984)

- pole przekroju kątownika równoramiennego 40x40x4: F = 3,08 cm^2 (j.w.)

Ponadto przyjęto, że l = 1 m, q = 3 kN/m.
Pręty skratowania złożone są z dwóch kątowników, a więc $A = 2F$ = 6,16 cm^2.
Poszukiwane przemieszczenia są równe:

$$u_D = 143{,}0317 \cdot \frac{ql^4}{EI} + 14{,}1240 \cdot \frac{ql^2}{EA} =$$

$$= 143{,}0317 \cdot \frac{3 \cdot 10^3 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 1^4 \, \mathrm{m}^4}{205 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 29210 \cdot 10^{-8} \, \mathrm{m}^4} + 14{,}1240 \cdot \frac{3 \cdot 10^3 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 1^2 \, \mathrm{m}^2}{205 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 6{,}16 \cdot 10^{-4} \, \mathrm{m}^2} =$$

$$= 7{,}1659 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{m} + 3{,}3554 \cdot 10^{-4} \, \mathrm{m} = 7{,}5014 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{m} = 7{,}5014 \, \mathrm{mm}$$

oraz

$$\Delta l_{BC} = -8{,}0988 \cdot \frac{ql^2}{EA} = -8{,}0988 \cdot \frac{3 \cdot 10^3 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 1^2 \, \mathrm{m}^2}{205 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 6{,}16 \cdot 10^{-4} \, \mathrm{m}^2} = -0{,}1924 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{m} =$$

$$= -0{,}1924 \, \mathrm{mm}$$