Wprowadzenie

Wyznaczanie wykresów sił przekrojowych jest niezbędne w procesie projektowania konstrukcji prętowych. Na ich podstawie określamy kształt i wymiary przekrojów poprzecznych prętów (warunek wytrzymałości). W układach statycznie niewyznaczalnych nie dysponujemy wystarczającą ilością równań równowagi do wyznaczenia sił przekrojowych, a w przypadku układów zewnętrznie statycznie niewyznaczalnych również reakcji podporowych. Jedną z metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych (układów o nadliczbowych więzach) jest metoda sił. W układach rozwiązywanych metodą sił niewiadomymi są siły uogólnione, a równania, z których są one wyznaczane, są związkami geometrycznymi. Sposób rozwiązywania układu statycznie niewyznaczalnego metodą sił jest następujący:

- Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu *n*.

W przypadku belki z przegubami korzystamy ze wzoru

$$n = r - p - 3$$

gdzie:

r - liczba składowych reakcji podpór

p - liczba połączeń między podukładami (przegubów, teleskopów i tulei).

W przypadku belki ze skratowaniem korzystamy ze wzoru

$$n = r + 3 \cdot z - p - 3$$

gdzie:

r - liczba składowych reakcji podpór

z - liczba zamkniętych części układu

p - liczba przegubów (z uwzględnieniem ich krotności).

- Utworzenie układu podstawowego.

W rozwiązywanym układzie usuwamy *n* nadliczbowych więzów, tworząc w ten sposób układ podstawowy (statycznie wyznaczalny i geometrycznie niezmienny).

- Obciążenie układu podstawowego.

Układ podstawowy będzie pod względem statycznym równoważny rozpatrywanemu układowi statycznie niewyznaczalnemu, jeżeli poza obciążeniem zewnętrznym działającym na układ, w miejscach usuniętych więzów wprowadzimy nadliczbowe $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n$ - reakcje usuniętych więzów (siłę w miejscu, w którym więz blokował przesunięcie, natomiast moment w miejscu, w którym więz blokował obrót).

- Wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) i wyrazów wolnych układu równań kanonicznych metody sił.

Układ podstawowy będzie pod względem kinematycznym równoważny rozpatrywanemu układowi statycznie niewyznaczalnemu, jeżeli pod wpływem obciążenia zewnętrznego oraz niewiadomych nadliczbowych $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n$ przemieszczenia uogólnione w układzie podstawowym w miejscach usuniętych *n* więzów będą równe zeru. Przyjmijmy założenie, że rozpatrywana konstrukcja wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego. Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujący układ *n* równań z *n* niewiadomymi:

$$\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\ldots+\delta_{1i}\cdot X_i+\ldots+\delta_{1n}\cdot X_n+\delta_{10}=0$$
$$\delta_{21}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2+\ldots+\delta_{2i}\cdot X_i+\ldots+\delta_{2n}\cdot X_n+\delta_{20}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_{i1}\cdot X_1+\delta_{i2}\cdot X_2+\ldots+\delta_{ii}\cdot X_i+\ldots+\delta_{in}\cdot X_n+\delta_{i0}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_{n1}\cdot X_1+\delta_{n2}\cdot X_2+\ldots+\delta_{ni}\cdot X_i+\ldots+\delta_{nn}\cdot X_n+\delta_{n0}=0$$

gdzie:

δ_{jk} - przemieszczenie uogólnione odpowiadające nadliczbowej X_j wywołane działaniem nadliczbowej $X_k=1$

δ_{j0} - przemieszczenie uogólnione odpowiadające nadliczbowej X_j wywołane działaniem obciążenia zewnętrznego.

Załóżmy, że rozpatrywana konstrukcja jest układem belkowym złożonym z prętów smukłych (stosunek wysokości przekroju poprzecznego pręta do jego długości $\frac{h}{l}\leq\frac{1}{10}$). Możemy wówczas pominąć wpływ sił poprzecznych na wielkość przemieszczeń. Wpływ sił podłużnych działających w prętach zginanych na wielkość przemieszczeń jako mały też można pominąć. Przyjmijmy również, że podpory są niepodatne oraz, że na układ nie działa obciążenie termiczne ani nie występują w konstrukcji błędy montażowe. Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra otrzymujemy

$$\delta_{jk}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_jM_k}{E_iI_i}ds$$

$$\delta_{j0}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_jM_0}{E_iI_i}ds$$

gdzie:

M_j - moment zginający wywołany działaniem nadliczbowej $X_j=1$

M_k - moment zginający wywołany działaniem nadliczbowej $X_k=1$

M_0 - moment zginający wywołany działaniem obciążenia zewnętrznego

E_iI_i - sztywność zginania *i*-tego pręta.

Jeżeli konstrukcja składa się z prętów zginanych oraz z prętów dwuprzegubowych, w których nie działają momenty gnące i siły poprzeczne (belka ze skratowaniem), to wpływ sił podłużnych na wielkość przemieszczeń uwzględniamy jedynie w prętach dwuprzegubowych, natomiast w prętach zginanych wpływ ten jako mały można pominąć. Wówczas wzór Maxwella-Mohra ma postać

$$\delta_{jk}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_jM_k}{E_iI_i}ds+\sum_i\int_0^{l_i}\frac{N_jN_k}{E_iA_i}ds$$

$$\delta_{j0}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_jM_0}{E_iI_i}ds+\sum_i\int_0^{l_i}\frac{N_jN_0}{E_iA_i}ds$$

gdzie:

N_j - siła podłużna wywołana działaniem nadliczbowej $X_j = 1$

N_k - siła podłużna wywołana działaniem nadliczbowej $X_k = 1$

N_0 - siła podłużna wywołana działaniem obciążenia zewnętrznego

$E_i A_i$ - sztywność ściskania *i*-tego pręta.

Z twierdzenia o wzajemności przemieszczeń wynika, że

$$\delta_{jk} = \delta_{kj}$$

Wartość całek możemy wyznaczyć korzystając ze wzoru Wereszczagina. W tym celu należy sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie podstawowym obciążonym kolejno siłami $X_1 = 1, X_2 = 1, ..., X_i = 1, ..., X_n = 1$ oraz obciążeniem zewnętrznym.

- Wyznaczenie sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym.

Po rozwiązaniu układu równań metody sił możemy wyznaczyć siły przekrojowe

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + ... + N_i \cdot X_i + ... + N_n \cdot X_n + N_0$$

$$T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 + ... + T_i \cdot X_i + ... + T_n \cdot X_n + T_0$$

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + ... + M_i \cdot X_i + ... + M_n \cdot X_n + M_0$$

gdzie:

N, *T*, *M* - siły przekrojowe w układzie statycznie niewyznaczalnym

N_i, T_i, M_i - siły przekrojowe w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym od obciążenia nadliczbową $X_i = 1$

N_0, T_0, M_0 - siły przekrojowe w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym od obciążenia zewnętrznego

$X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n$ - wartości nadliczbowych otrzymane z rozwiązania układu równań metody sił.

Konstrukcja pod wpływem obciążenia odkształca się, a jej punkty doznają przemieszczeń liniowych i kątowych. Umiejętność wyznaczania tych przemieszczeń jest konieczna przy sprawdzaniu warunku sztywności (przemieszczenia nie mogą przekraczać wartości dopuszczalnych, określonych w normie stosownej do rodzaju konstrukcji). W celu wyznaczenia przemieszczenia możemy skorzystać ze wzoru Maxwella-Mohra. W przypadku belek wzór ma postać

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}\, M}{E_i I_i} ds$$

W przypadku belek ze skratowaniem uwzględniamy wpływ sił podłużnych w prętach dwuprzegubowych, w których nie działają momenty gnące i siły poprzeczne. Wpływ sił podłużnych działających w prętach zginanych na wielkość przemieszczeń jako mały można pominąć. Wzór ma postać

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}\, M}{E_i I_i} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{N}\, N}{E_i A_i} ds$$

W powyższych wzorach przyjęto oznaczenia:

M, *N* - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia rzeczywistego w układzie statycznie niewyznaczalnym

$\overline{M}$, $\overline{N}$ - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie niewyznaczalnym

$E_i I_i$ - sztywność zginania *i*-tego pręta

$E_i A_i$ - sztywność ściskania *i*-tego pręta.

Wyznaczanie przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych możemy znacznie uprościć wykorzystując twierdzenia redukcyjne. W myśl pierwszego twierdzenia redukcyjnego siły przekrojowe od obciążenia wirtualnego możemy wyznaczyć w układzie statycznie wyznaczalnym, otrzymanym poprzez usunięcie nadliczbowych więzów w układzie statycznie niewyznaczalnym. Wzór na przemieszczenie ma postać

dla belek

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}^{(0)} M}{E_i I_i} ds$$

dla belek ze skratowaniem

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}^{(0)} M}{E_i I_i} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{N}^{(0)} N}{E_i A_i} ds$$

gdzie

M, *N* - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia rzeczywistego (czynnego) w układzie statycznie niewyznaczalnym

$\overline{M}^{(0)}$, $\overline{N}^{(0)}$ - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie wyznaczalnym

W myśl drugiego twierdzenia redukcyjnego siły przekrojowe od obciążenia czynnego możemy wyznaczyć w układzie statycznie wyznaczalnym, otrzymanym poprzez likwidację nadliczbowych więzów w układzie statycznie niewyznaczalnym. Wzór na przemieszczenie ma postać

dla belek

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}\, M^{(0)}}{E_i I_i} ds$$

dla belek ze skratowaniem

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}\, M^{(0)}}{E_i I_i} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{N}\, N^{(0)}}{E_i A_i} ds$$

gdzie

$M^{(0)}$, $N^{(0)}$ - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia rzeczywistego (czynnego) w układzie statycznie wyznaczalnym

$\overline{M}$, $\overline{N}$ - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie niewyznaczalnym

Powyższe zapisy pierwszego i drugiego twierdzenia redukcyjnego są słuszne przy założeniu, że podpory są niepodatne oraz, że na układ nie działa obciążenie termiczne ani nie występują w konstrukcji błędy montażowe.