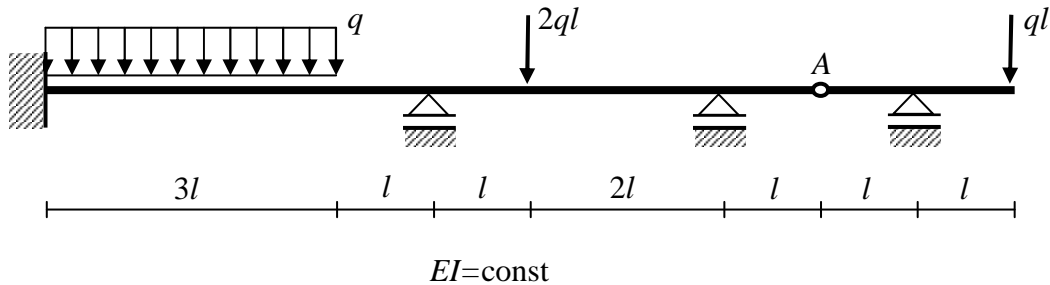


Przykład 4.1. Belka dwukrotnie statycznie niewyznaczalna o stałej sztywności zginania

Polecenie: korzystając z metody sił sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej belki. Wyznaczyć ugięcie oraz względną zmianę kąta w punkcie A.



Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od obliczenia stopnia statycznej niewyznaczalności układu. W przypadku belki ciągłej z przegubami korzystamy ze wzoru

$$n = r - p - 3$$

gdzie:

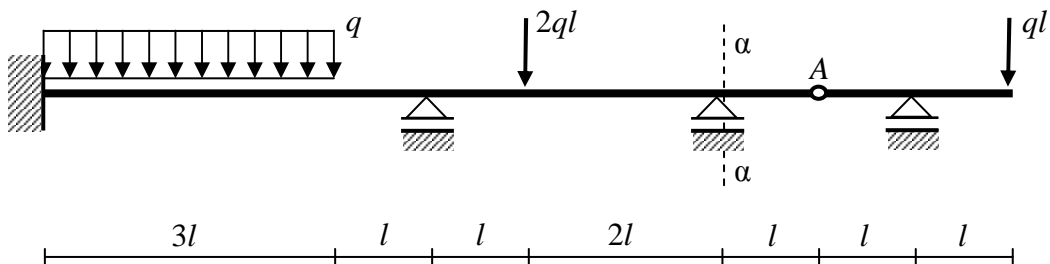
r - liczba składowych reakcji podpór

p - liczba połączeń między podukładami (przegubów, teleskopów i tulei).

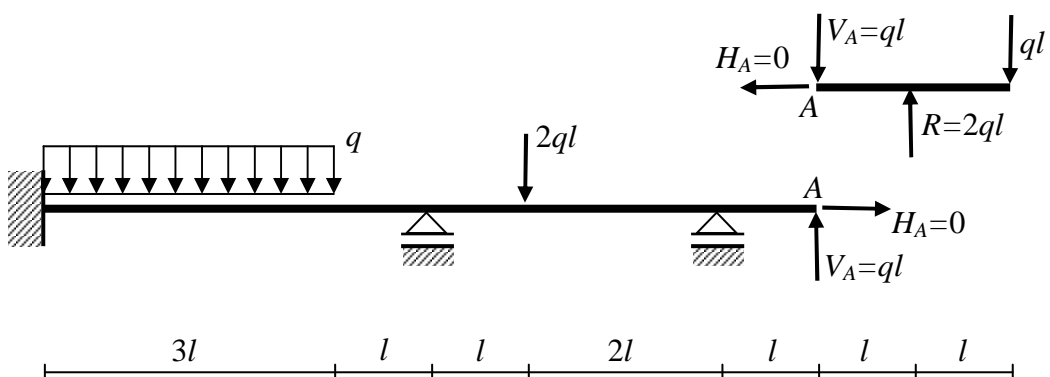
W rozpatrywanym układzie

$$n = 6 - 1 - 3 = 2$$

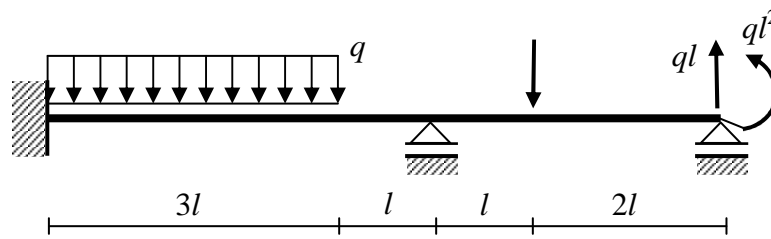
Część belki znajdująca się na prawo od przekroju $\alpha\text{-}\alpha$ jest statycznie wyznaczalna. Możemy rozwiązać belkę składającą się z lewego i środkowego przęsła przyjmując siły działające w przekroju $\alpha\text{-}\alpha$ jako obciążenie zewnętrzne.



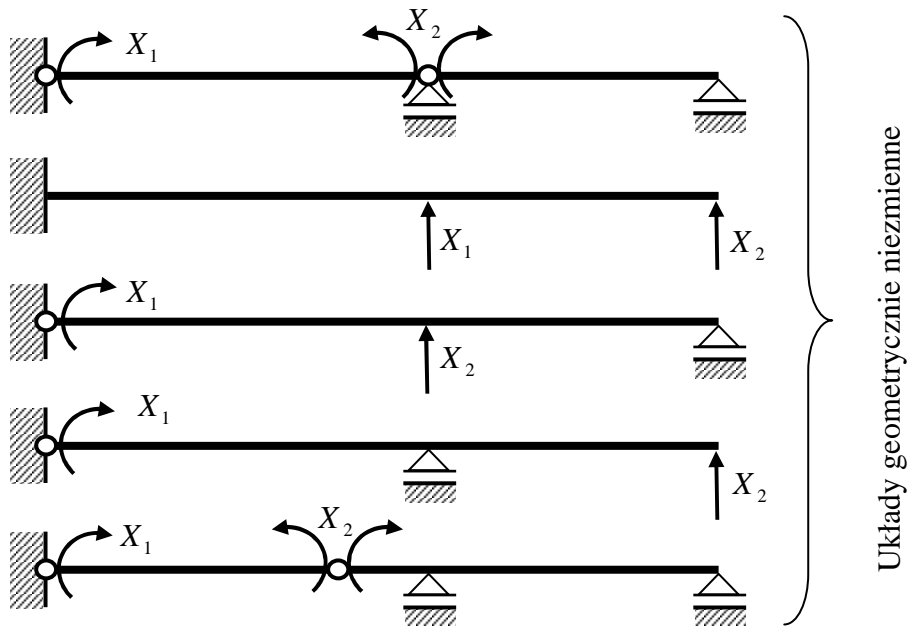
Wyznamy oddziaływania w przegubie A oraz reakcję na prawej podporze. Wykorzystamy wartości tych sił do sporządzenia wykresów sił przekrojowych w części statycznie wyznaczalnej układu.



Do rozwiązania przyjmijmy poniższy schemat.

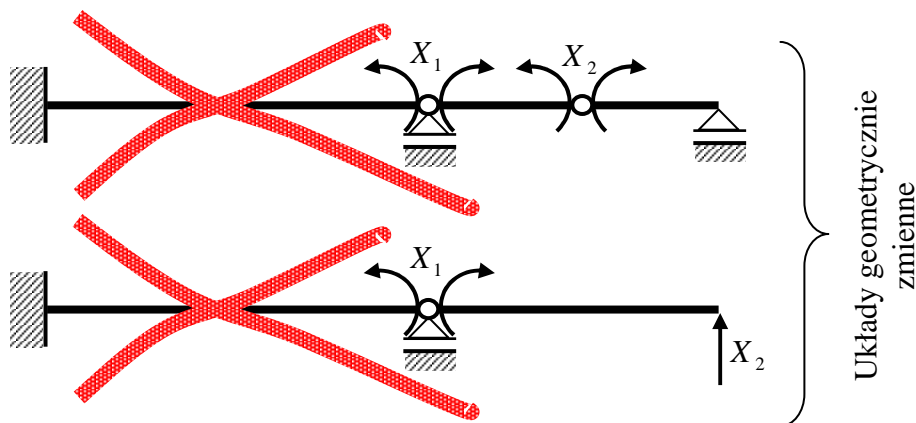


Układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny. Tworzymy układ podstawowy statycznie wyznaczalny przez usunięcie dwu nadliczbowych więzów. Musi to być układ geometrycznie niezmienny. Istnieje wiele takich schematów. Poniżej podano kilka przykładów.



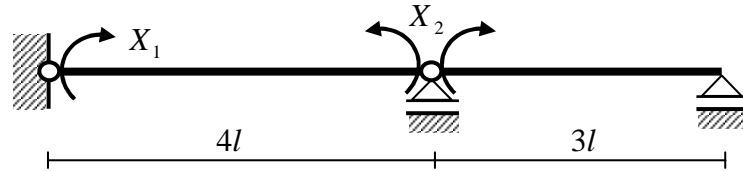
Jako układ podstawowy przyjmijmy pierwszy spośród powyższych, geometrycznie niezmiennych układów.

Po usunięciu więzów należy sprawdzić, czy otrzymany układ jest geometrycznie niezmienny. Układ geometrycznie zmienny nie może być układem podstawowym. Poniżej pokazane są układy geometrycznie zmienne otrzymane po usunięciu dwu więzów w rozpatrywanej, dwukrotnie statycznie niewyznaczalnej belce.



Wykresy sił przekrojowych nie zależą od przyjętego układu podstawowego. Wybór tego układu jest jednak istotny, ponieważ od niego zależy, czy wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) oraz wyrazów wolnych w układzie równań metody sił jest mniej lub bardziej pracochłonne.

Przyjęty układ podstawowy składa się z dwu belek wolnopodpartych.

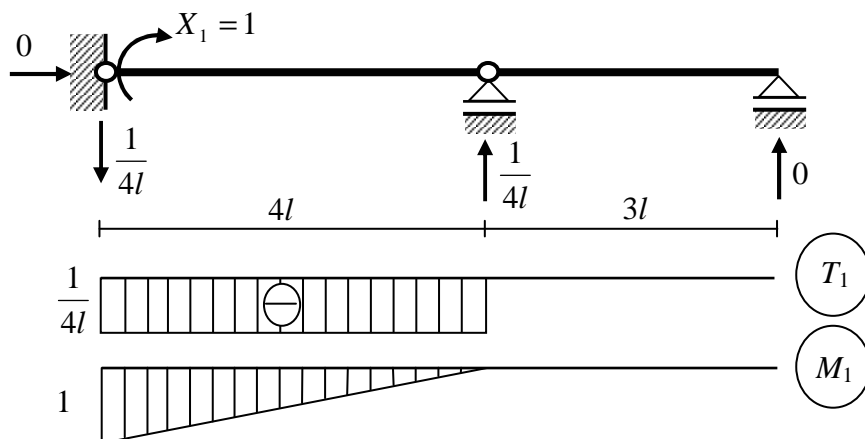


Przyjęcie w belce ciągłej wieloprzęsłowej momentów podporowych jako nadliczbowych jest korzystne ze względów rachunkowych, ponieważ wykresy momentów od jednostkowych nadliczbowych są niezerowe tylko w sąsiednich przęsłach.

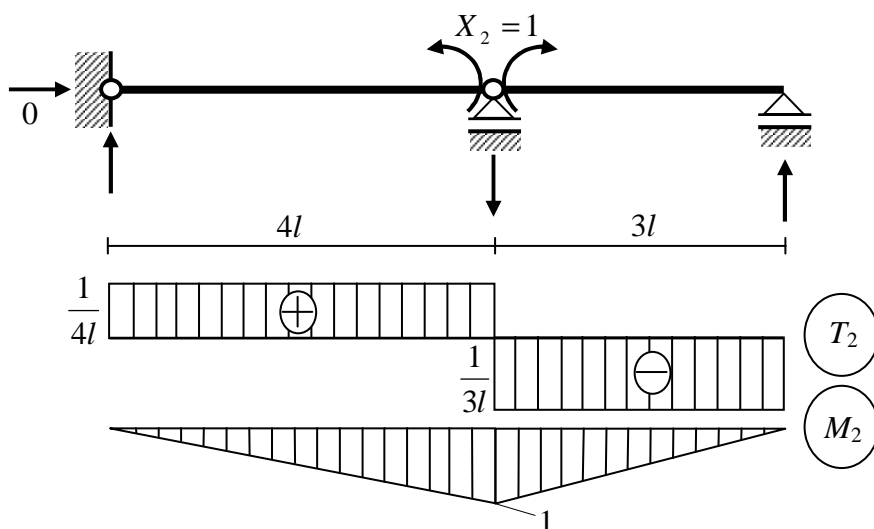
Ze względu na pionowy kierunek obciążenia i reakcji na podporach przesuwnych we wszystkich przekrojach poprzecznych belki siły normalne są zerowe.

Sporządzamy wykresy sił przekrojowych (sił poprzecznych i momentów gnących), wywołanych przez jednostkowe siły nadliczbowe i obciążenie zewnętrzne.

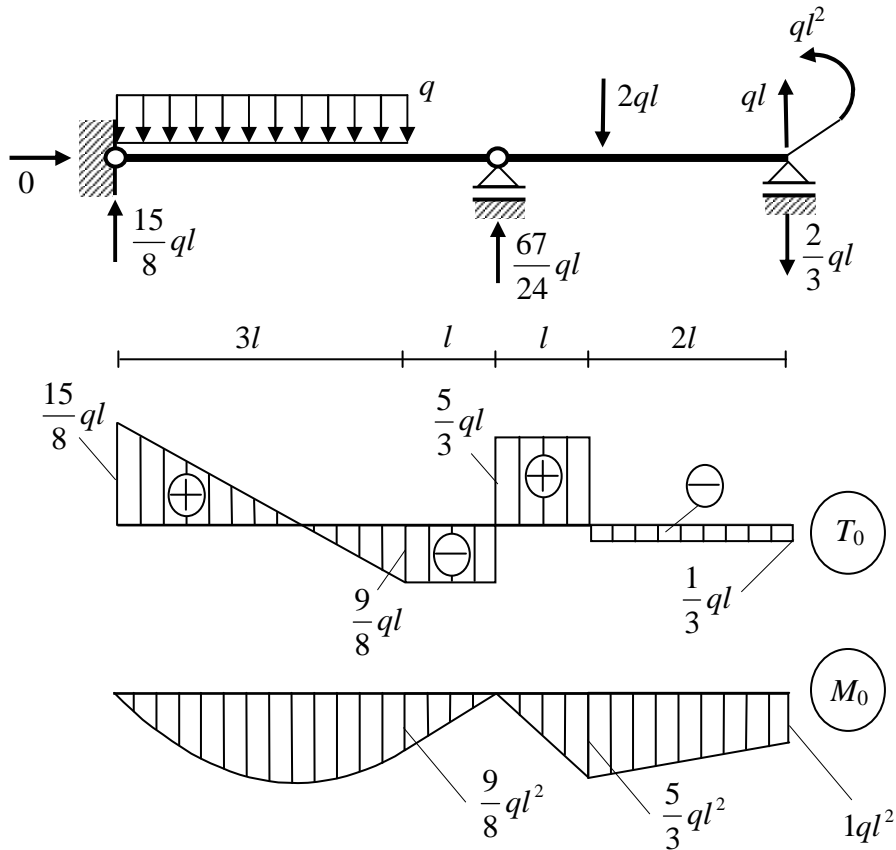
Stan $X_1 = 1$



Stan $X_2 = 1$



Stan zerowy (obciążenie zewnętrzne)

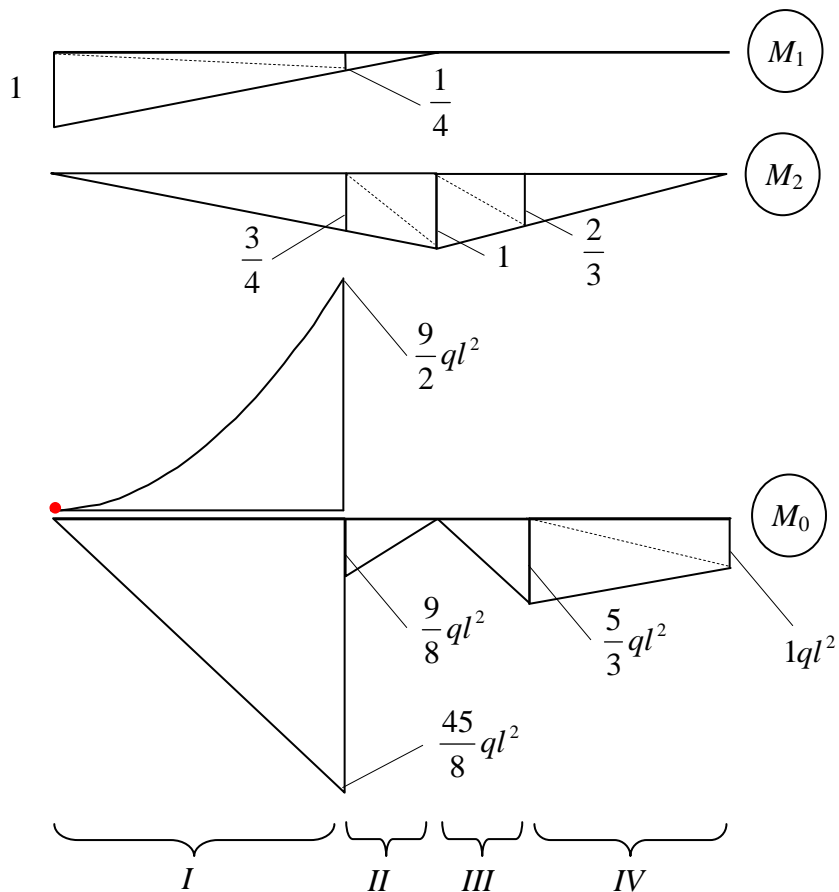


Po sporządzeniu wykresów sił przekrojowych we wszystkich stanach można przystąpić do wyznaczenia współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) oraz wyrazów wolnych w układzie równań metody sił. Wartość całek wyznaczmy korzystając ze wzoru Wereszczagina. W tym celu wykres momentów od obciążenia zewnętrznego na odcinku występowania obciążenia ciągłego przedstawimy jako sumę dwu wykresów, dla których znamy pola powierzchni oraz współrzędne środków ciężkości (wykres liniowy pochodzi od składowej pionowej reakcji na lewej podporze, natomiast wykres paraboliczny od obciążenia ciągłego). Miejsce występowania ekstremum na wykresie momentów oznaczone jest kolorem czerwonym. W przypadku gdy figura pod wykresem momentów jest trapezem, podzielimy ją na dwa trójkąty. Nie jest to jedyny możliwy sposób podziału. Można również zastosować podział na prostokąt i trójkąt.

$$\delta_{11} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{22} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_2 M_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{l}{EI}$$



$$\delta_{10} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_0}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} ql^2 \cdot 3l \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{8} ql^2 \cdot 3l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}_{II} = \frac{75}{32} \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

$$\delta_{20} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_2 M_0}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} ql^2 \cdot 3l \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{8} ql^2 \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \right) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} ql^2 \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right)}_{II} + \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} ql^2 \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right)}_{III} +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} ql^2 + \frac{1}{3} \cdot 1ql^2 \right)}_{IV} = \frac{1085}{288} \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

Układ równań metody sił ma postać

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{l}{EI} \cdot X_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{EI} \cdot X_2 + \frac{75}{32} \cdot \frac{ql^3}{EI} = 0$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{EI} \cdot X_1 + \frac{7}{3} \cdot \frac{l}{EI} \cdot X_2 + \frac{1085}{288} \cdot \frac{ql^3}{EI} = 0$$

Rozwiązanie powyższego układu równań jest następujące

$$X_1 = -1 \frac{251}{2304} ql^2 \cong -1,109 ql^2 \qquad X_2 = -1 \frac{343}{1152} ql^2 \cong -1,298 ql^2.$$

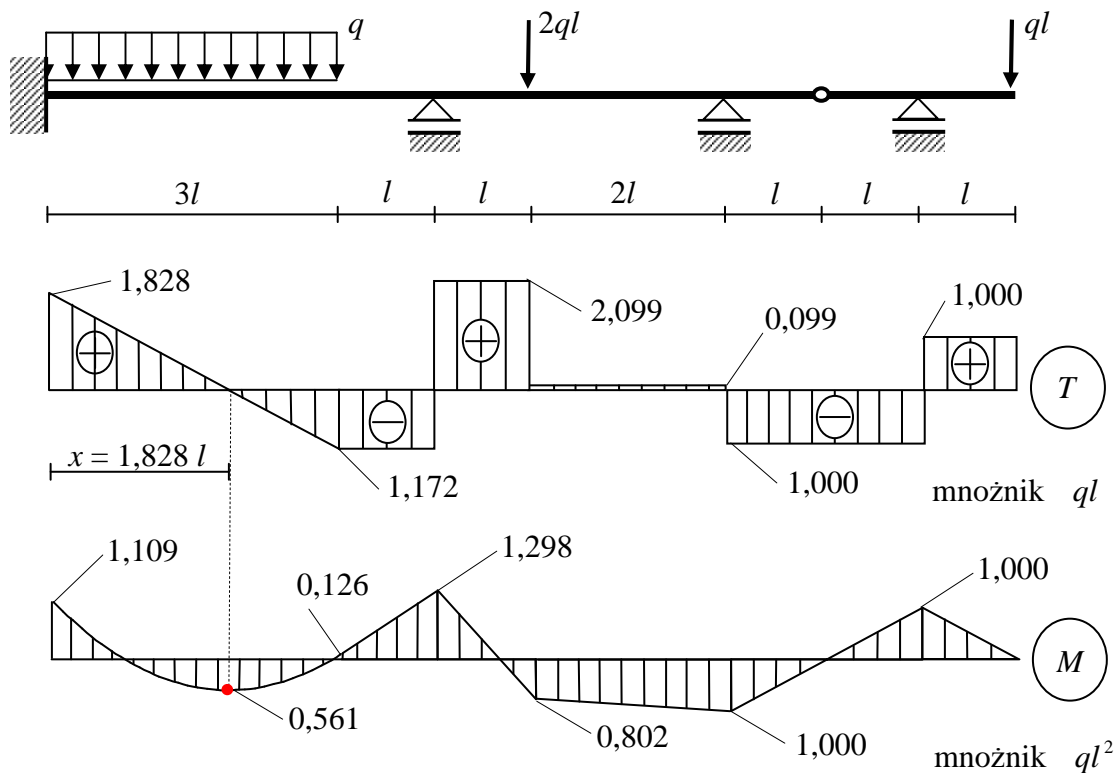
Rzędne wykresów sił przekrojowych wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji.

$$T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 + T_0$$

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_0$$

Otrzymane w ten sposób wykresy należy uzupełnić wykresami dla statycznie wyznaczalnej części układu, znajdującej się na prawo od przekroju $\alpha-\alpha$.

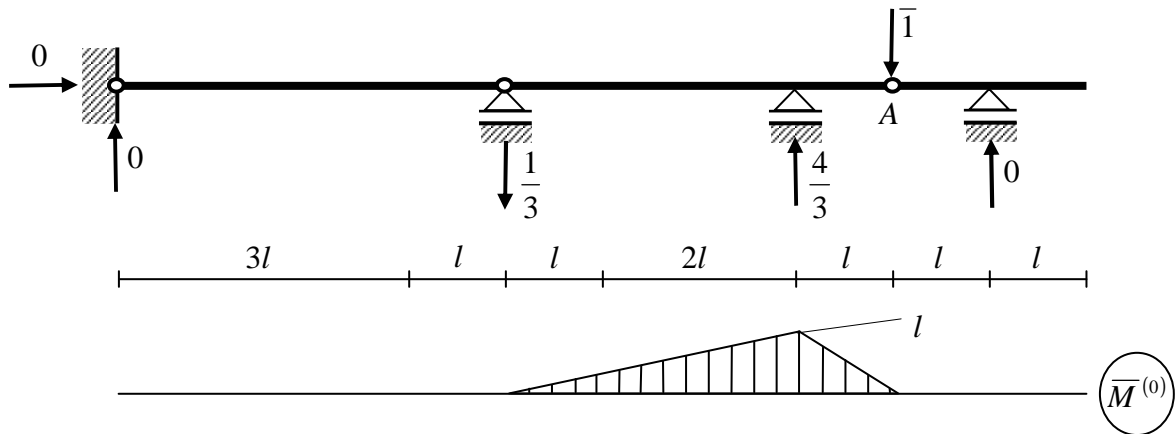
Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym



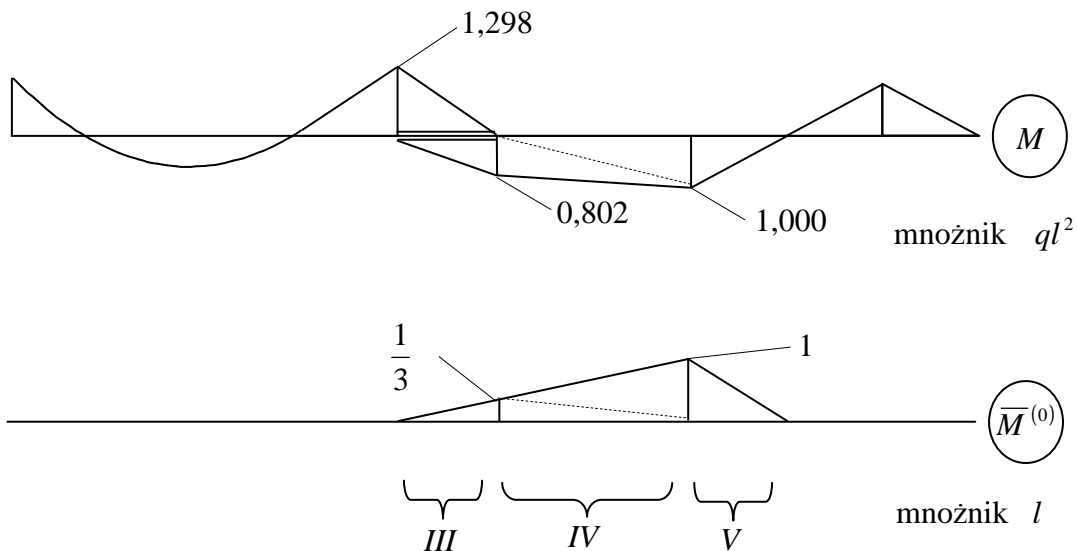
Polecenie do zadania obejmuje również wyznaczenie ugięcia i względnej zmiany kąta ugięcia w punkcie A. W celu uniknięcia wyznaczania wykresu momentów gnących od obciążenia jednostkową siłą w układzie statycznie niewyznaczalnym, skorzystamy z pierwszego twierdzenia redukcyjnego. Wirtualne obciążenie przyłożymy w punkcie A w układzie statycznie wyznaczalnym, utworzonym przez usunięcie nadliczbowych więzów (nie musi to być układ podstawowy, przyjęty do wyznaczenia wykresów sił przekrojowych).

Wyznaczenie ugięcia w punkcie A

W przypadku wyznaczania ugięcia w punkcie A należy przyłożyć obciążenie wirtualne w postaci siły jednostkowej o kierunku pionowym działającej w tym punkcie, a następnie wykonać wykres momentów gnących.



Wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego w przedziale III podzielimy na dwa wykresy trójkątne. W przedziale IV figury pod oboma wykresami momentów są trapezami, więc podzielimy każdy z nich na dwa trójkąty.



$$v_A = \sum_s \int \frac{M \bar{M}^{(0)}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1,298ql^2 - \frac{2}{3} \cdot 0,802ql^2 \right)}_{III} \right] +$$

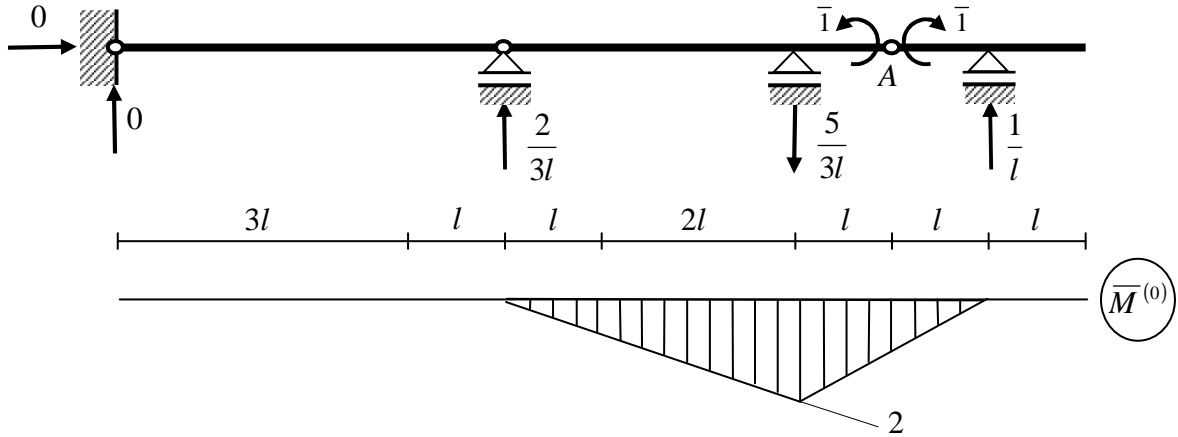
$$- \frac{1}{EI} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot 2l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,802ql^2 + \frac{1}{3} \cdot 1,000ql^2 \right)}_{IV} + \frac{1}{2} \cdot l \cdot 2l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,802ql^2 + \frac{2}{3} \cdot 1,000ql^2 \right) \right] +$$

$$- \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,000ql^2}_V = -1,5734 \cdot \frac{ql^4}{EI}$$

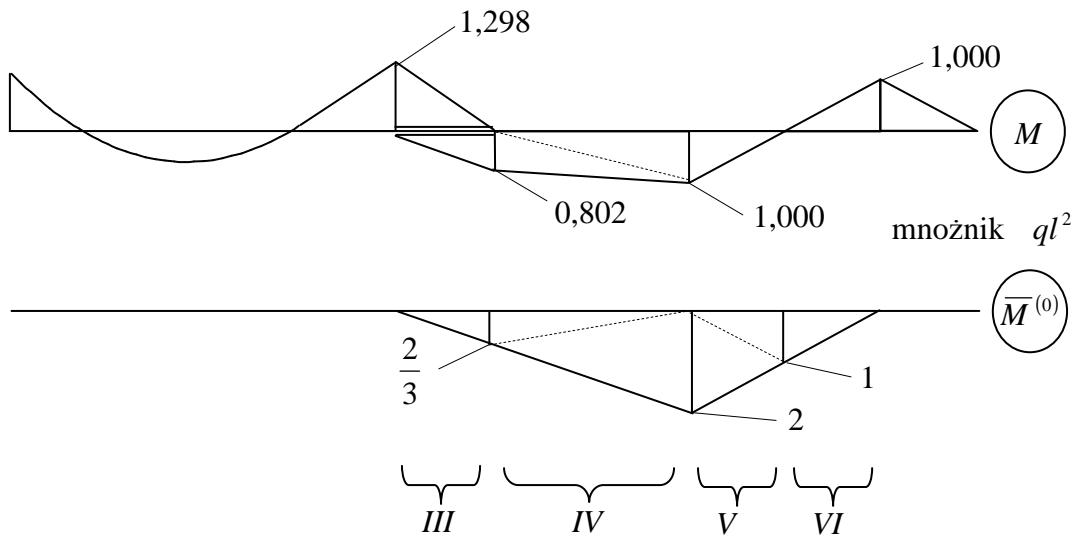
Ujemny wynik oznacza, że zwrot ugięcia jest przeciwny do zwrotu jednostkowej siły wirtualnej. Punkt A przemieszcza się do góry.

Wyznaczenie względnej zmiany kąta ugięcia w punkcie A

W celu wyznaczenia zmiany kąta między prętami układu połączonymi przegubowo w punkcie A, przykładamy do obu prętów w tym punkcie dwa jednostkowe momenty o przeciwnych zwrotach, a następnie wykonujemy wykres momentów gnących.



Wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego w przedziale III podzielimy na dwa wykresy trójkątne. W przedziale IV figury pod oboma wykresami momentów są trapezami, więc podzielimy każdy z nich na dwa trójkąty. Podobnie w przedziale V trapez pod wykresem momentów od obciążenia wirtualnego przedstawimy jako dwa trójkąty.

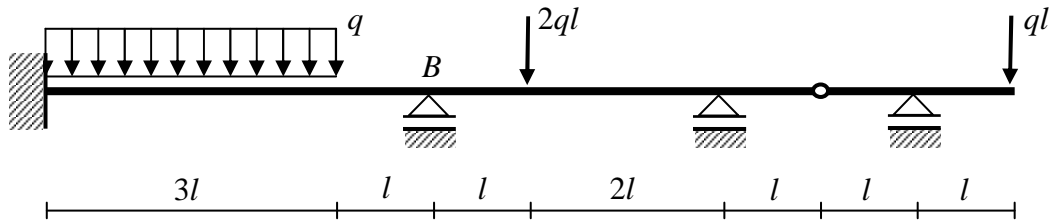


$$\Delta\varphi_A = \sum_s \int \frac{M \bar{M}^{(0)}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 1,298ql^2 + \frac{2}{3} \cdot 0,802ql^2 \right)}_{III} \right] +$$

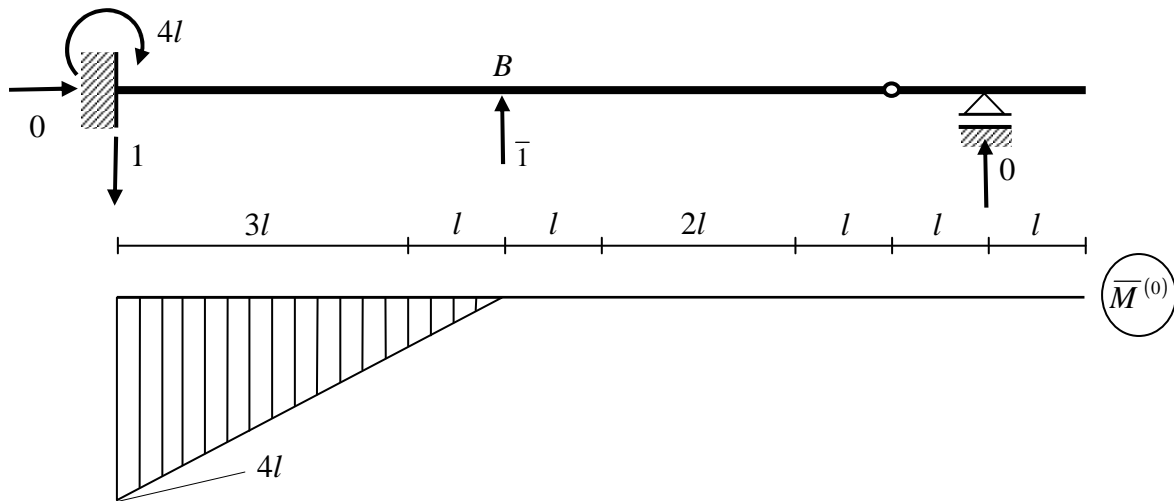
$$+ \frac{1}{EI} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,802ql^2 + \frac{1}{3} \cdot 1,000ql^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,802ql^2 + \frac{2}{3} \cdot 1,000ql^2 \right)}_{IV} \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,000ql^2}_{V,VI} = 3,1467 \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

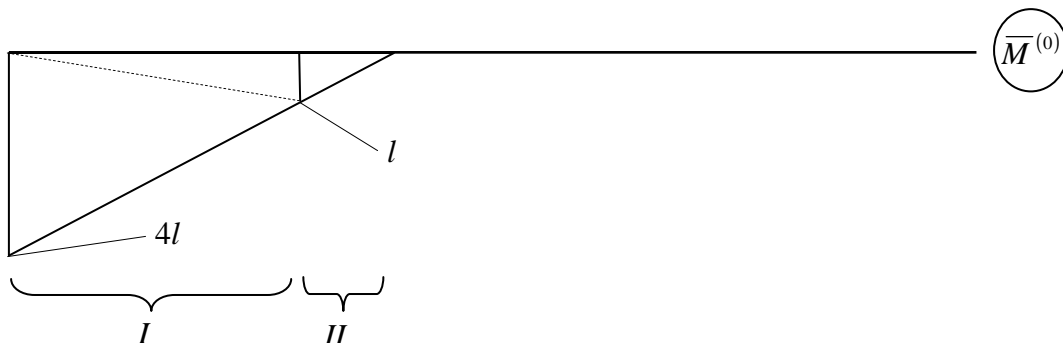
Z twierdzenia redukcyjnego można również skorzystać w celu sprawdzenia poprawności rozwiązania zadania, wyznaczając znane przemieszczenie. Ugięcie w miejscu występowania podpory jest równe zero. Wyznamy ugięcie w punkcie B .

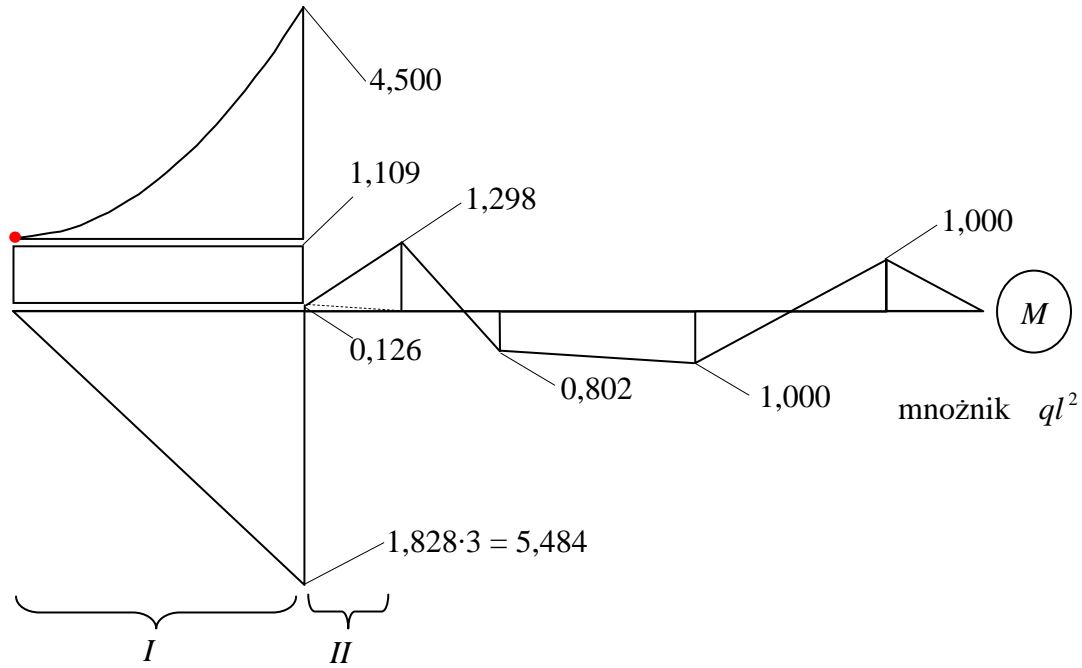


W tym przypadku należy przyłożyć obciążenie wirtualne w postaci siły jednostkowej o kierunku pionowym działającej w punkcie B , a następnie wykonać wykres momentów gnących. Wirtualne obciążenie przyłożymy w układzie statycznie wyznaczalnym, utworzonym przez usunięcie nadliczbowych więzów.



W przedziale I figura pod wykresem momentów od obciążenia wirtualnego w układzie statycznie wyznaczalnym jest trapezem, więc podzielimy ją na dwa trójkąty. Paraboliczny wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego w układzie statycznie niewyznaczalnym w przedziale I podzielimy na trzy wykresy: trójkątny od składowej pionowej reakcji w utwierdzeniu, prostokątny od momentu w utwierdzeniu i paraboliczny od obciążenia ciągłego. W przedziale II figura pod wykresem momentów od obciążenia zewnętrznego jest trapezem, więc podzielimy ją na dwa trójkąty.





$$v_B = \sum \int_s \frac{M \bar{M}^{(0)}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \underbrace{\left[-\frac{1}{3} \cdot 4,500ql^2 \cdot 3l \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 4l + \frac{3}{4} \cdot l \right) - 1,109ql^2 \cdot 3l \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4l + \frac{1}{2} \cdot l \right) \right]}_I + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot 5,484ql^2 \cdot 3l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4l + \frac{2}{3} \cdot l \right) \right]}_I - \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,126ql^2 + \frac{1}{3} \cdot 1,298ql^2 \right) \right]}_{II} \right\} = 0,0015 \cdot \frac{ql^4}{EI}$$

Otrzymaliśmy wartość ugięcia w punkcie B , gdzie występuje podpora uniemożliwiająca przemieszczenie w kierunku pionowym, różną od zera. Jednakże wyznaczając stosunek wartości ugięć w punktach B i A możemy stwierdzić, że uzyskany wynik nie świadczy o błędnym rozwiązaniu zadania, jest natomiast konsekwencją stosowania zaokrążeń.

$$\frac{v_B}{|v_A|} = \frac{0,0015 \frac{ql^4}{EI}}{1,5734 \frac{ql^4}{EI}} < 1 \text{ ‰}$$

A zatem $v_B = 0,0015 \cdot \frac{ql^4}{EI} \cong 0$.