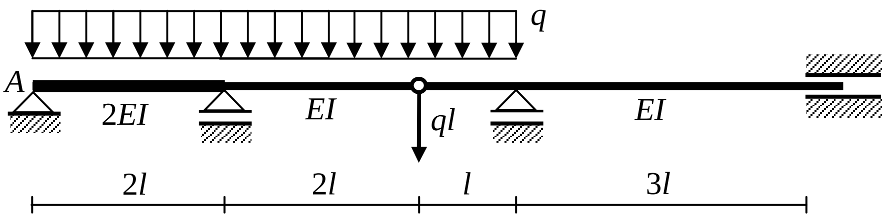
Przykład 4.2. Belka dwukrotnie statycznie niewyznaczalna

Polecenie: korzystając z metody sił sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej belki. Wyznaczyć kąt ugięcia w punkcie *A*.



Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od obliczenia stopnia statycznej niewyznaczalności układu. W przypadku belki z przegubami korzystamy ze wzoru

$$n = r - p - 3$$

gdzie:

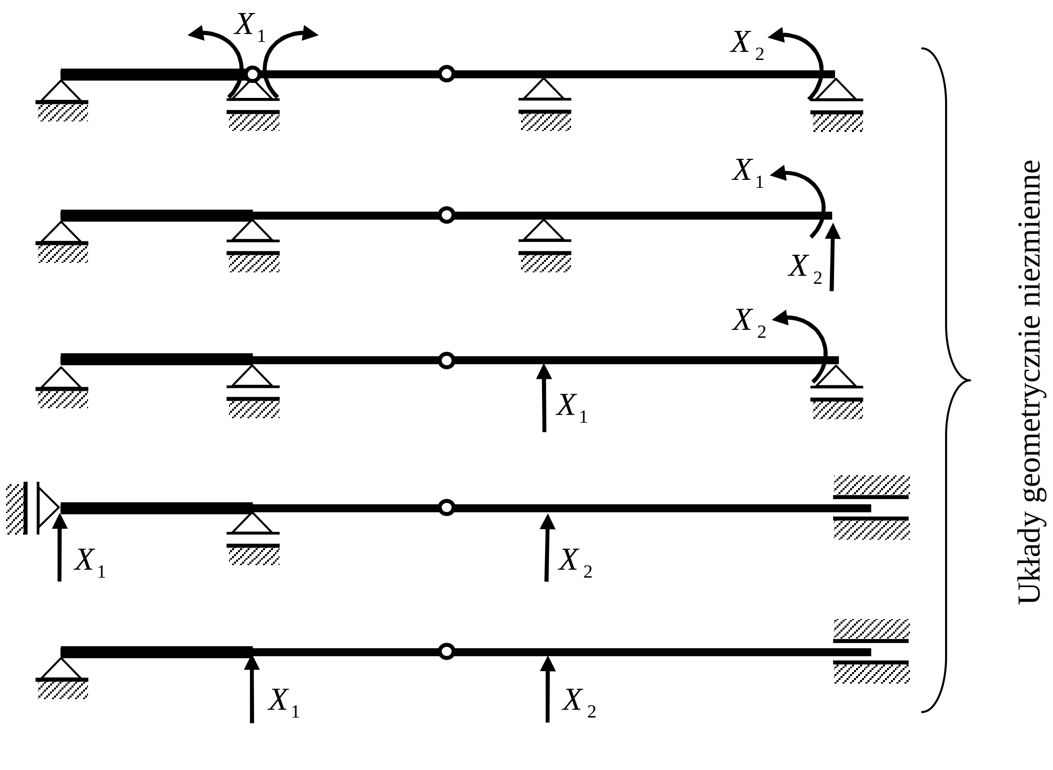
r - liczba składowych reakcji podpór

p - liczba połączeń między podukładami (przegubów, teleskopów i tulei).

W rozpatrywanym układzie

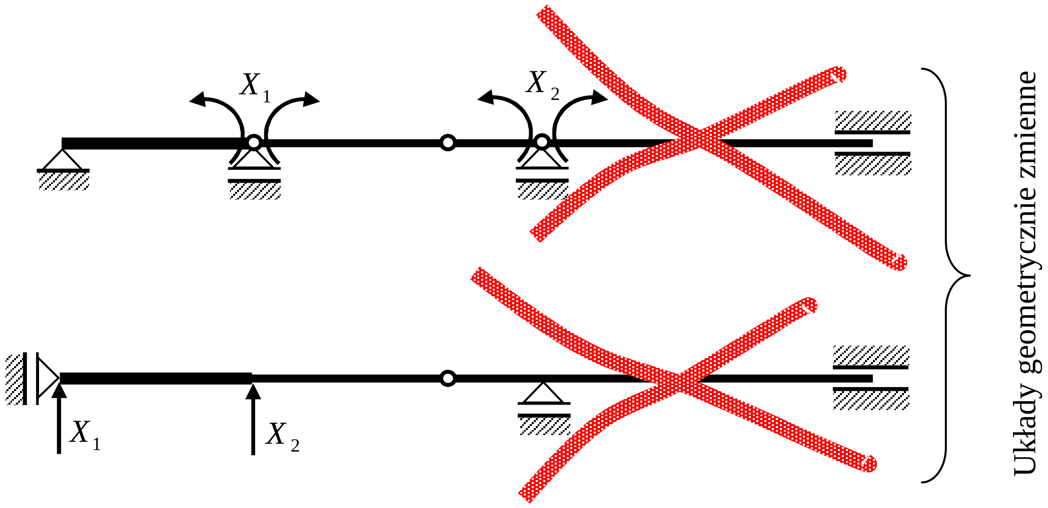
$$n = 6 - 1 - 3 = 2$$

Układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny. Tworzymy układ podstawowy statycznie wyznaczalny przez usunięcie dwu nadliczbowych więzów. Musi to być układ geometrycznie niezmienny. Istnieje wiele takich schematów. Poniżej podano kilka przykładów.

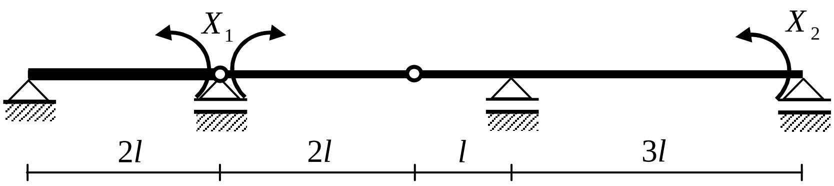


Jako układ podstawowy przyjmiemy pierwszy spośród powyższych, geometrycznie niezmiennych układów.

Po usunięciu nadliczbowych więzów należy sprawdzić, czy otrzymany układ jest geometrycznie niezmienny. Układ geometrycznie zmienny nie może być układem podstawowym. Poniżej pokazane są układy geometrycznie zmienne otrzymane po usunięciu dwu więzów w rozpatrywanej, dwukrotnie statycznie niewyznaczalnej belce.



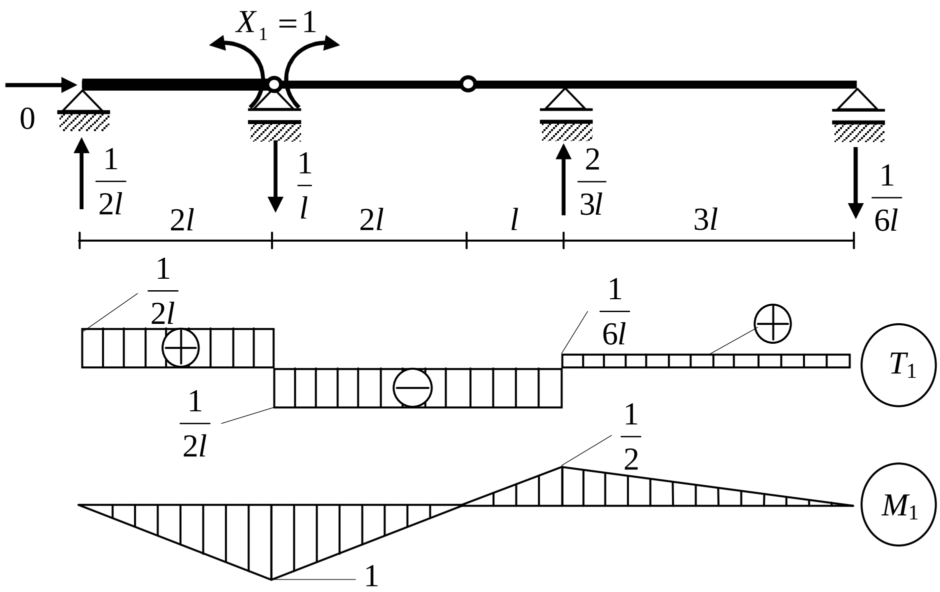
Wykresy sił przekrojowych nie zależą od przyjętego układu podstawowego. Wybór tego układu jest jednak istotny, ponieważ od niego zależy, czy wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) oraz wyrazów wolnych w układzie równań metody sił będzie mniej lub bardziej pracochłonne. Poniższy rysunek przedstawia przyjęty do obliczeń układ podstawowy.



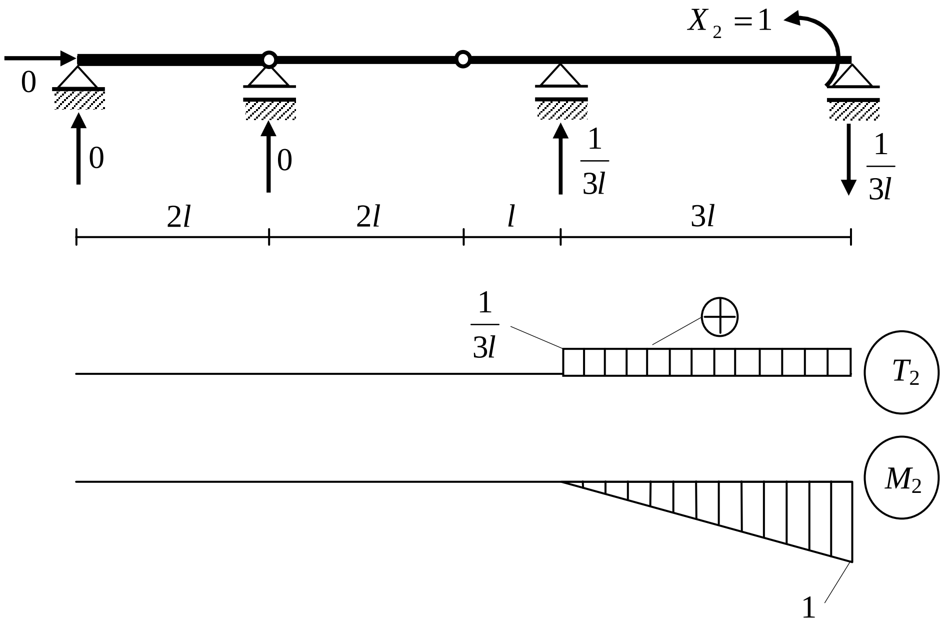
Ze względu na pionowy kierunek obciążenia i reakcji na podporach przesuwnych we wszystkich przekrojach poprzecznych belki siły normalne są zerowe.

Sporządzamy wykresy sił przekrojowych (sił poprzecznych i momentów gnących), wywołanych przez jednostkowe siły nadliczbowe i obciążenie zewnętrzne.

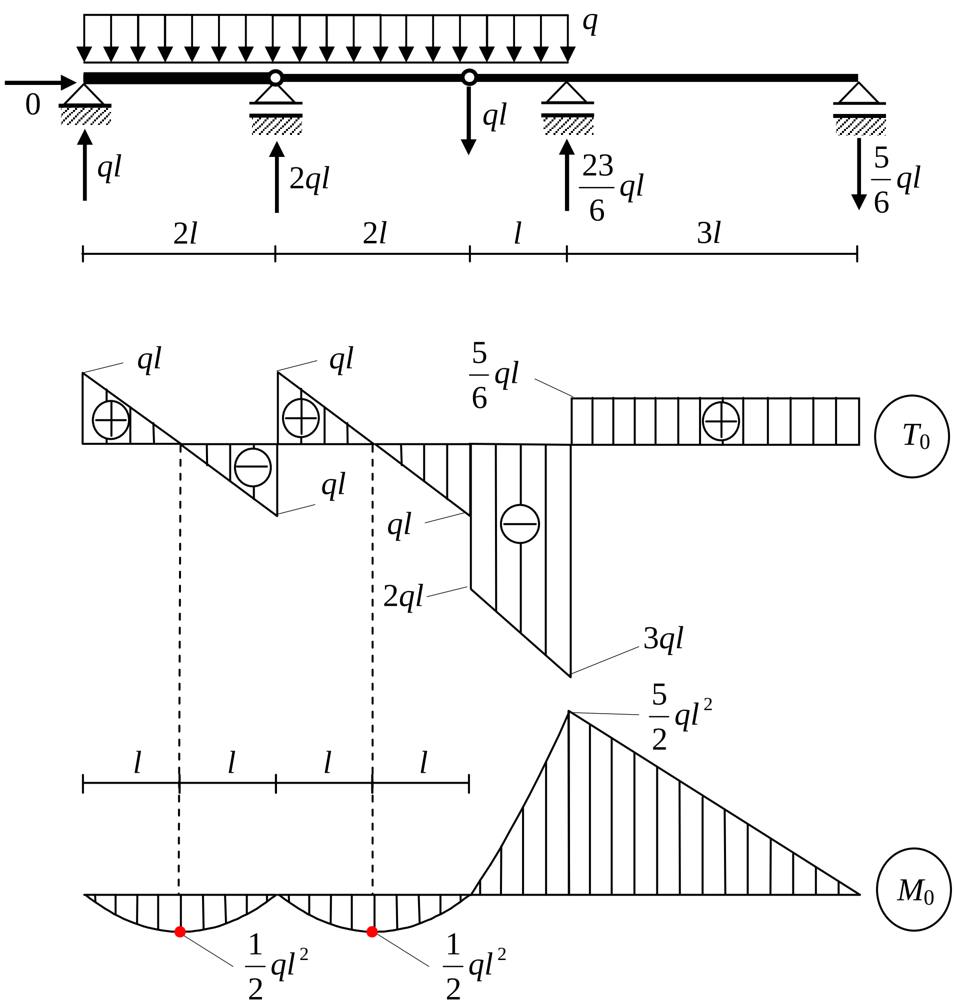
Stan $X_1 = 1$



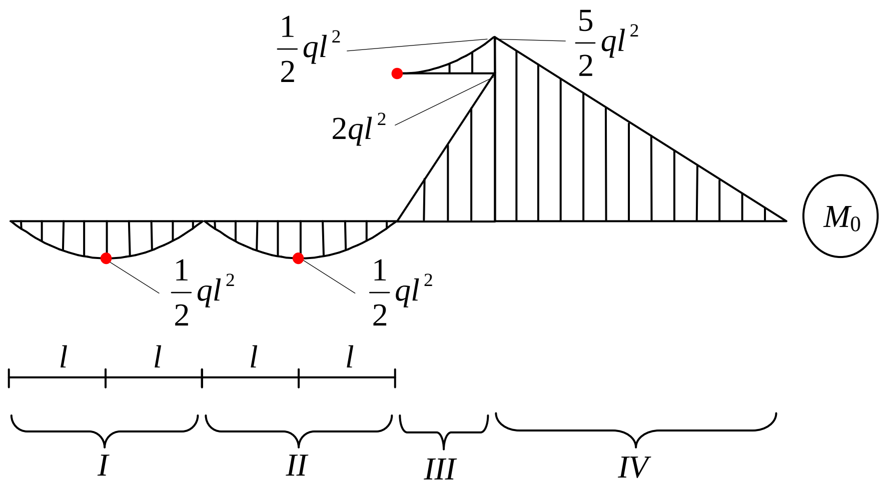
Stan $X_2 = 1$



Stan zerowy (obciążenie zewnętrzne)



Po sporządzeniu wykresów sił przekrojowych we wszystkich stanach można przystąpić do wyznaczenia współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) oraz wyrazów wolnych w układzie równań metody sił. Wartość całek wyznaczymy korzystając ze wzoru Wereszczagina. W tym celu wykres momentów od obciążenia zewnętrznego w przedziale *III* przedstawimy jako sumę dwu wykresów, dla których znamy pola powierzchni oraz współrzędne środków ciężkości (wykres liniowy pochodzi od składowej pionowej oddziaływania w przegubie, natomiast wykres paraboliczny od obciążenia ciągłego). Miejsca występowania ekstremów na wykresie momentów oznaczone są kolorem czerwonym.



$$\delta_{11}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_1M_1}{(EI)_i}ds=\frac{1}{2EI}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 1}_{I}+\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 1}_{II}+\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{III}+$$

$$+\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{IV}=\frac{4}{3}\cdot\frac{l}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_1M_2}{(EI)_i}ds=-\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot\frac{1}{3}\cdot 1}_{IV}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{l}{EI}$$

$$\delta_{22}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_2M_2}{(EI)_i}ds=\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3l\cdot\frac{2}{3}\cdot 1}_{IV}=1\cdot\frac{l}{EI}$$

$$\delta_{10}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_1M_0}{(EI)_i}ds=\frac{1}{2EI}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}ql^2\cdot 2l\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}_{I}+\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}ql^2\cdot 2l\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}_{II}+$$

$$+\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ql^2\cdot l\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2ql^2\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}_{III}+\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}ql^2\cdot 3l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{IV}=\frac{103}{48}\cdot\frac{ql^3}{EI}$$

$$\delta_{20}=\sum_i\int_0^{l_i}\frac{M_2M_0}{(EI)_i}ds=-\frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}ql^2\cdot 3l\cdot\frac{1}{3}\cdot 1}_{IV}=-\frac{5}{4}\cdot\frac{ql^3}{EI}$$

Układ równań metody sił ma postać

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{l}{EI}\cdot X_1-\frac{1}{4}\cdot\frac{l}{EI}\cdot X_2+\frac{103}{48}\cdot\frac{ql^3}{EI}=0$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{l}{EI}\cdot X_1+\ 1\cdot\frac{l}{EI}\cdot X_2\ -\ \frac{5}{4}\cdot\frac{ql^3}{EI}=0$$

Rozwiązanie powyższego układu równań jest następujące

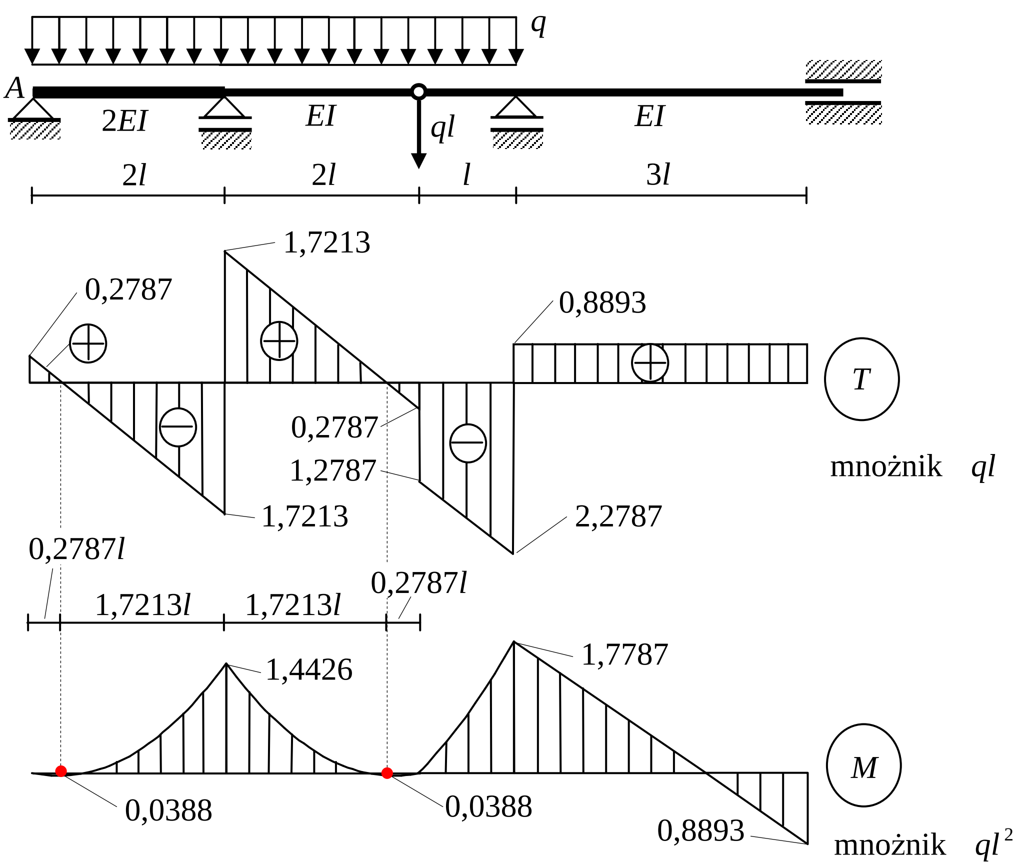
$$X_1=-1\frac{27}{61}ql^2\cong -1{,}4426ql^2 \qquad\qquad X_2=\frac{217}{244}ql^2\cong 0{,}8893ql^2\ .$$

Rzędne wykresów sił przekrojowych wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji.

$$T=\ T_1\cdot X_1+\ T_2\cdot X_2+\ T_0$$

$$M\ =M_1\cdot X_1+M_2\cdot X_2+M_0$$

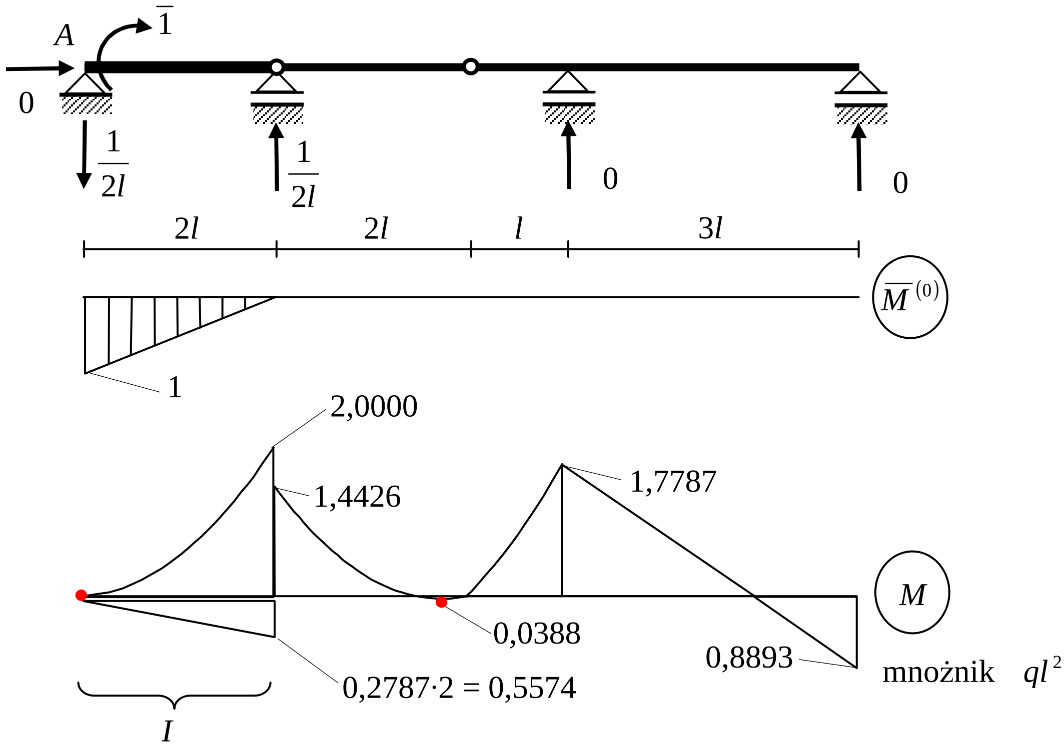
<u>Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym</u>



Polecenie do zadania obejmuje również wyznaczenie kąta ugięcia w punkcie *A*. W celu uniknięcia wyznaczania wykresu momentów gnących od obciążenia wirtualnym jednostkowym momentem w układzie statycznie niewyznaczalnym, skorzystamy z pierwszego twierdzenia redukcyjnego. Wirtualne obciążenie przyłożymy w punkcie *A* w układzie statycznie wyznaczalnym, utworzonym przez usunięcie nadliczbowych więzów (nie musi to być układ podstawowy, przyjęty do wyznaczenia wykresów sił przekrojowych).

Wyznaczenie kąta ugięcia w punkcie *A*

W przypadku wyznaczania kąta ugięcia w punkcie *A* należy przyłożyć obciążenie wirtualne w postaci momentu jednostkowego działającego w tym punkcie, a następnie wykonać wykres momentów gnących.



Paraboliczny wykres momentów gnących od obciążenia zewnętrznego w układzie statycznie niewyznaczalnym w przedziale *I* podzielimy na dwa wykresy: trójkątny od składowej pionowej reakcji na lewej podporze i paraboliczny od obciążenia ciągłego. Miejsca występowania ekstremów na wykresie momentów oznaczone są kolorem czerwonym.

$$\varphi_A = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M\overline{M}^{(0)}}{(EI)_i}\,ds = \frac{1}{2EI}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\cdot 2{,}0000ql^2\cdot 2l\cdot\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}5574ql^2\cdot 2l\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\right)}_{I}=$$

$$=-0{,}07377\cdot\frac{ql^3}{EI}$$

Ujemna wartość kąta ugięcia oznacza, że kąt ma zwrot przeciwny do zwrotu momentu jednostkowego.