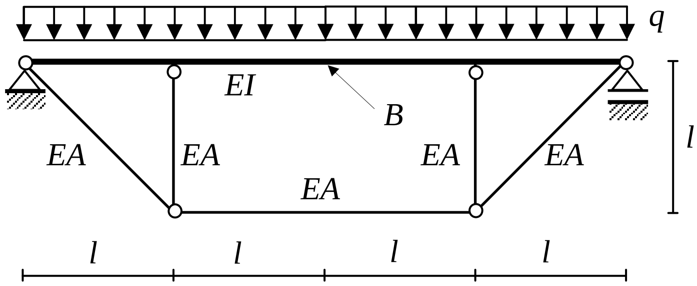
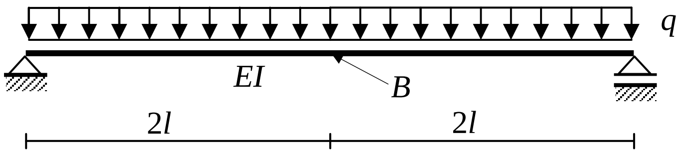
Przykład 4.4. Belka ze skratowaniem

Polecenie: korzystając z metody sił sporządzić wykresy sił przekrojowych w poniższej konstrukcji stalowej. Wyznaczyć ugięcie w punkcie *B* (w połowie rozpiętości belki). Porównać wyznaczone ugięcie ze strzałką ugięcia dla belki wolnopodpartej (bez skratowania) o tych samych wymiarach i tak samo obciążonej. Przyjąć, że belka wykonana jest z dwuteownika 360, pręty skratowania z dwu kątowników równoramiennych 40x40x4, natężenie obciążenia wynosi q=10kN/m a wymiar l=1m.





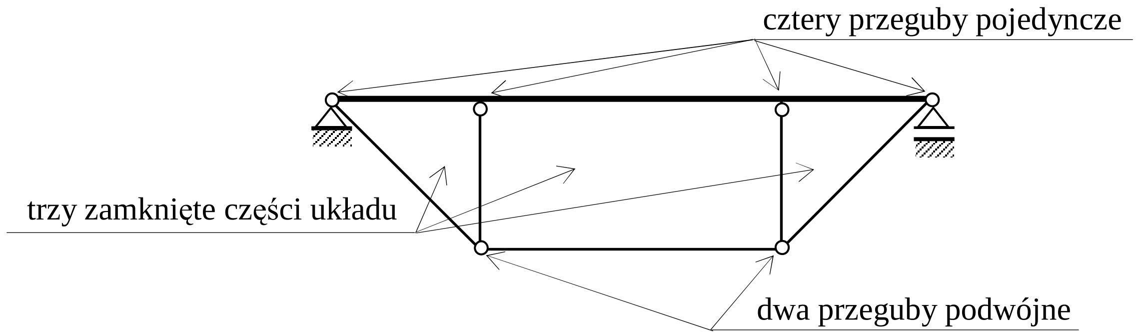
Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od obliczenia stopnia statycznej niewyznaczalności układu. W przypadku belki ze skratowaniem korzystamy ze wzoru

$$n = r + 3\cdot z - p - 3$$

gdzie:

r - liczba składowych reakcji podpór
z - liczba zamkniętych części układu
p - liczba przegubów.

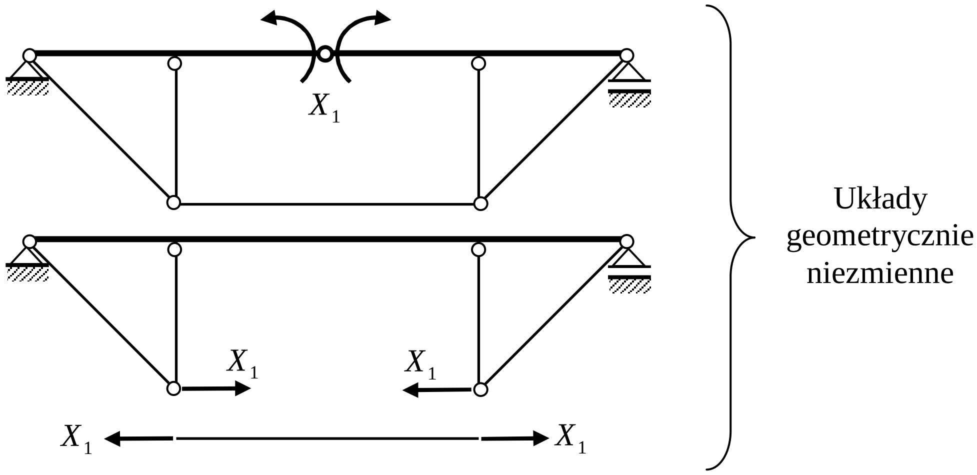
W rozpatrywanym układzie stopień statycznej niewyznaczalności wynosi



$$n = 3 + 3\cdot 3 - (4 + 2\cdot 2) - 3 = 1$$

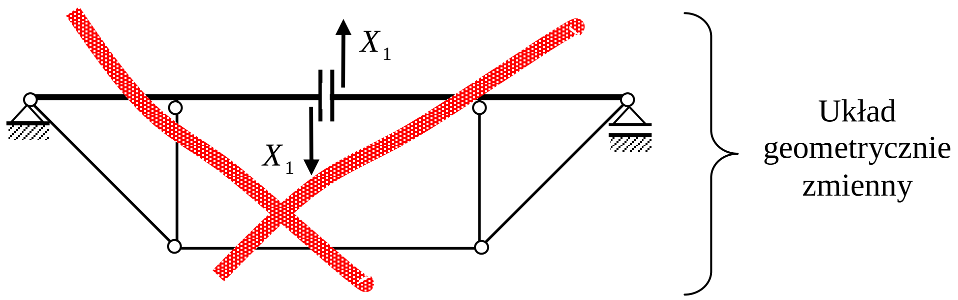
Możemy również określić stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanego układu analizując jego budowę.

Powyższy układ, otrzymany przez usunięcie jednego pręta dwuprzegubowego (jednego więzu) ze skratowania rozwiązywanej belki, jest statycznie wyznaczalny i geometrycznie niezmienny. Układ jest zatem jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Usuwając jeden nadliczbowy więz tworzymy układ podstawowy statycznie wyznaczalny. Istnieje wiele takich schematów. Poniżej podano dwa przykłady.

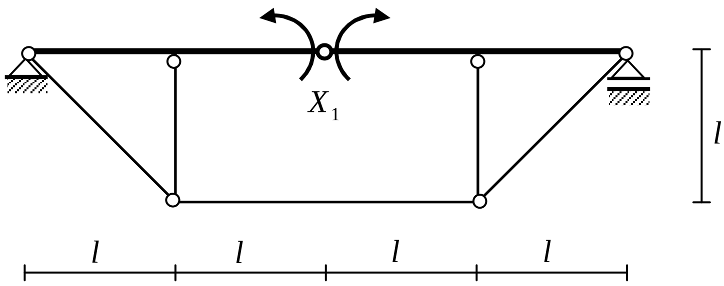


Jako układ podstawowy przyjmiemy pierwszy spośród powyższych, geometrycznie niezmiennych układów.

Po usunięciu nadliczbowego więzu należy sprawdzić, czy otrzymany układ jest geometrycznie niezmienny. <u>Układ geometrycznie zmienny nie może być układem podstawowym</u>. Poniżej pokazany jest układ geometrycznie zmienny otrzymany po usunięciu jednego więzu w rozpatrywanej, jednokrotnie statycznie niewyznaczalnej belce ze skratowaniem. Nie można również przyjąć jako nadliczbowej żadnej z reakcji podporowych, ponieważ układ jest zewnętrznie statycznie wyznaczalny.



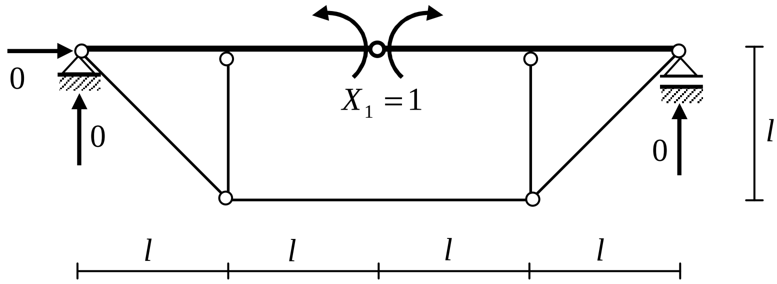
Poniższy rysunek przedstawia przyjęty do obliczeń układ podstawowy



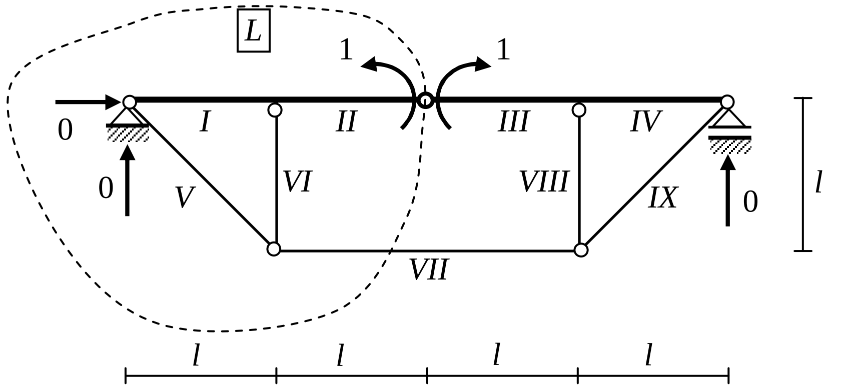
Mimo pionowego kierunku obciążenia i reakcji na podporach (składowa pozioma na podporze nieprzesuwnej ma wartość równą zero) we wszystkich przekrojach poprzecznych belki siły normalne są różne od zera. Wynika to z występowania w skratowaniu krzyżulców.

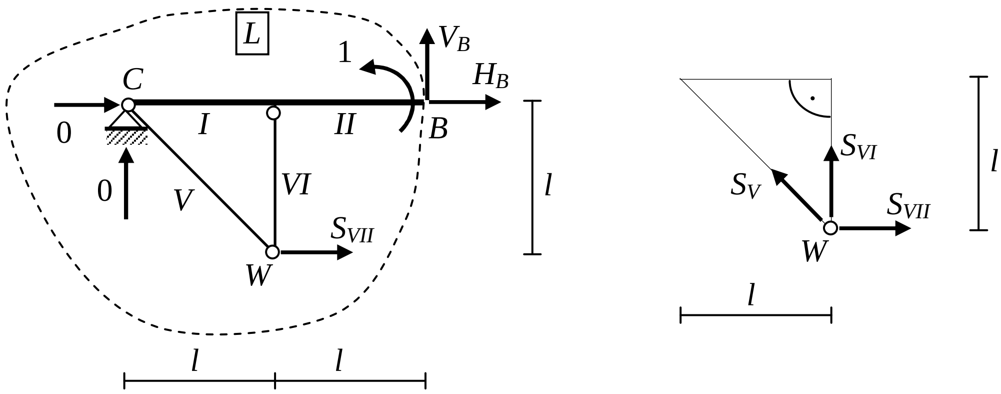
Sporządzamy wykresy sił przekrojowych: sił podłużnych, sił poprzecznych i momentów gnących dla pręta podlegającego zginaniu od obciążenia jednostkową siłę nadliczbową i obciążenia zewnętrznego. Wyznaczamy również siły podłużne w prętach skratowania w obu stanach.

Stan $X_1 = 1$



W rozpatrywanym stanie obciążeniem są dwa jednostkowe momenty o przeciwnych zwrotach, otrzymamy więc wszystkie składowe reakcji podporowych równe zero. W celu wyznaczenia sił w prętach skratowania należy zapisać równania równowagi dla lewego bądź prawego podukładu.





$$\sum_i M_{iB}^{L} = 0: \qquad 1 + S_{VII} \cdot l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{VII} = -\frac{1}{l}$$

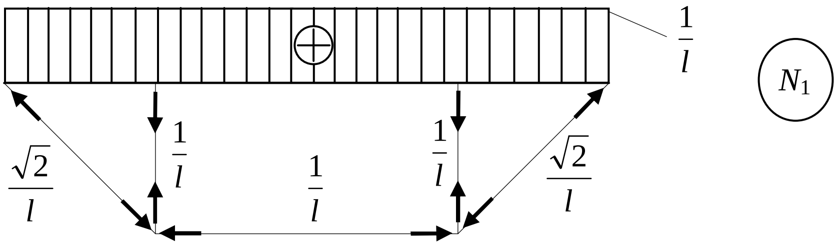
$$\sum_i P_{ix}^{W} = 0 \qquad S_{VII} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_V = -\frac{\sqrt{2}}{l}$$

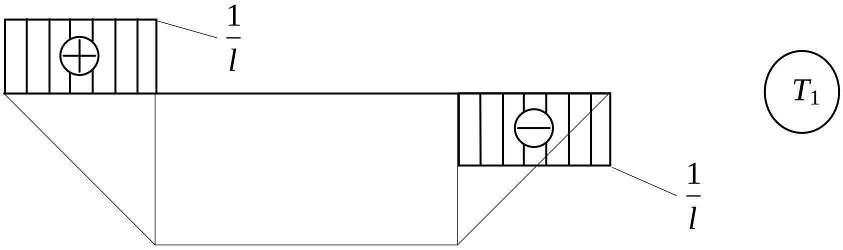
$$\sum_i P_{iy}^W = 0 \qquad S_{VI} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{VI} = \frac{1}{l}$$

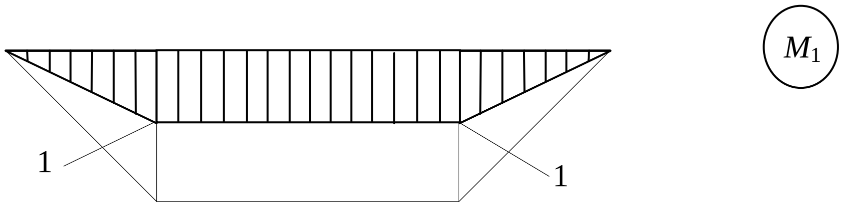
$$\sum_i P_{ix}^L = 0 \qquad S_{VII} + H_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_B = \frac{1}{l}$$

$$\sum_i P_{iy}^L = 0 \qquad V_B + V_C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_B = 0$$

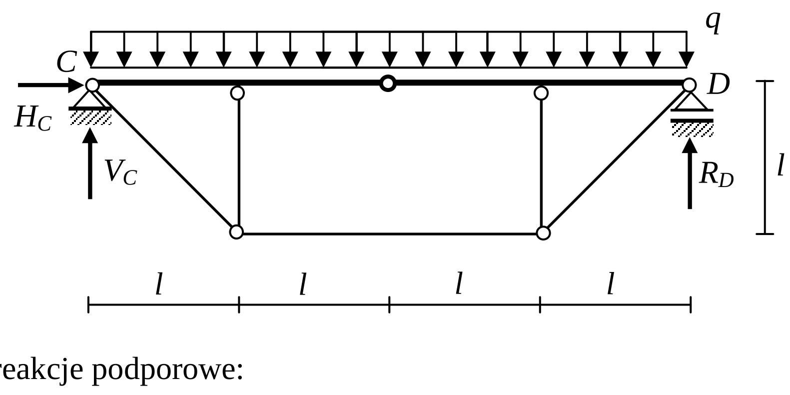
Przy sporządzaniu wykresów sił przekrojowych wykorzystamy symetrię budowy układu i obciążenia. Wykresy sił podłużnych i momentów gnących mają charakter symetryczny, natomiast wykres sił poprzecznych jest antysymetryczny.







Stan zerowy (obciążenie zewnętrzne)



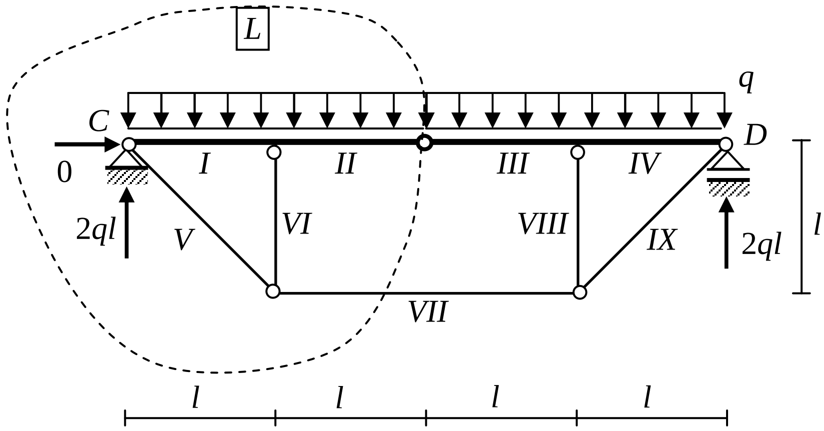
Wyznaczamy reakcje podporowe:

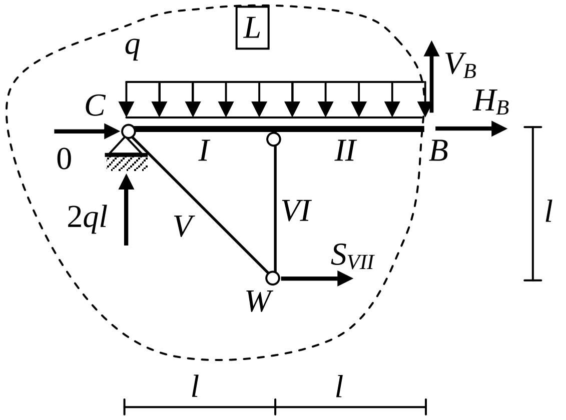
$$\sum_i P_{ix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_C = 0$$

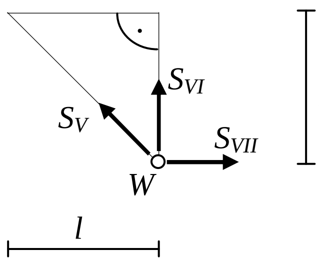
$$\sum_i M_{iC} = 0: \qquad R_D \cdot 4l - q \cdot 4l \cdot 2l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_D = 2ql$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \qquad V_C + R_D - q \cdot 4l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_C = 2ql$$

W celu wyznaczenia sił w prętach skratowania należy zapisać równania równowagi dla lewego bądź prawego podukładu.







$$\sum_i M_{iB}^{L} = 0: \qquad S_{VII} \cdot l + q \cdot 2l \cdot l - 2ql \cdot 2l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{VII} = 2ql$$

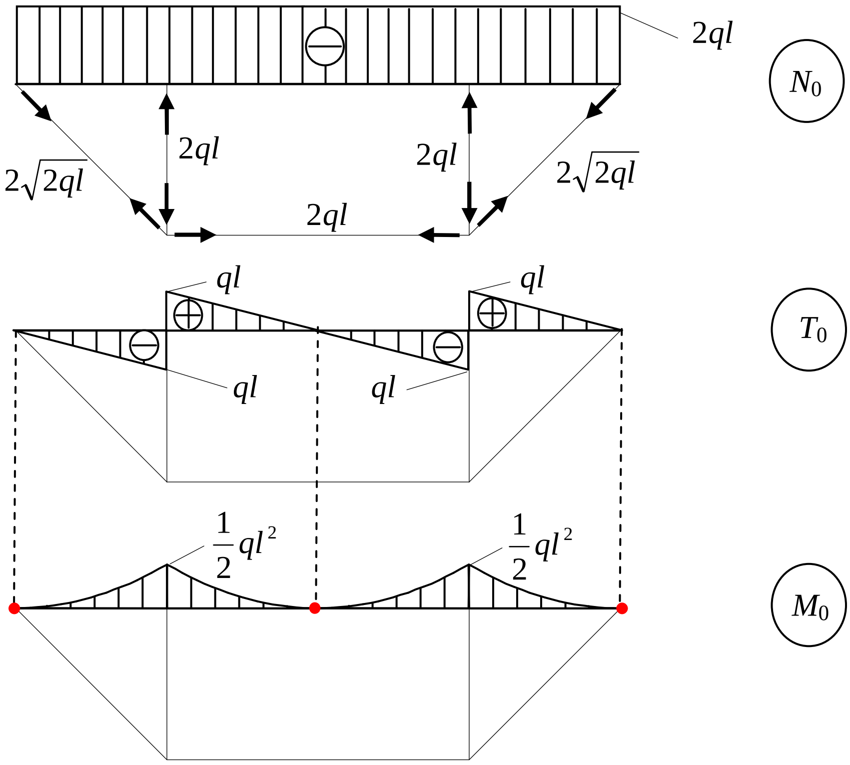
$$\sum_i P_{ix}^{W} = 0 \qquad S_{VII} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_V = 2\sqrt{2}ql$$

$$\sum_i P_{iy}^{W} = 0 \qquad S_{VI} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{VI} = -2ql$$

$$\sum_i P_{ix}^{L} = 0 \qquad S_{VII} + H_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_B = -2ql$$

$$\sum_i P_{iy}^{L} = 0 \qquad V_B + V_C - 2ql = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_B = 0$$

Przy sporządzaniu wykresów sił przekrojowych wykorzystamy symetrię budowy układu i obciążenia. Wykresy sił podłużnych i momentów gnących mają charakter symetryczny, natomiast wykres sił poprzecznych jest antysymetryczny.



Po sporządzeniu wykresów sił przekrojowych w obu stanach można przystąpić do wyznaczenia współczynnika przy niewiadomej (nadliczbowej) oraz wyrazu wolnego w równaniu metody sił. Wartości całek wyznaczymy korzystając ze wzoru Wereszczagina. Miejsca występowania ekstremów na wykresie momentów oznaczone są kolorem czerwonym. Całkowanie przeprowadzimy w przedziałach od *I* do *IX*.

$$\delta_{11} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_1}{E_i I_i} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_1 N_1}{E_i A_i} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left(\underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}_{I,IV} + \underbrace{1 \cdot 2l \cdot 1}_{II,III} \right) +$$

$$+ \frac{1}{EA} \cdot \left[\underbrace{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{l} \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{l} \right) \cdot \sqrt{2} l}_{V,IX} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{l} \cdot l}_{VI,VIII} + \underbrace{\left(-\frac{1}{l} \right) \cdot \left(-\frac{1}{l} \right) \cdot 2l}_{VII} \right] = \frac{8}{3} \cdot \frac{l}{EI} + 4 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{EA \cdot l}$$

$$\delta_{10} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_0}{E_i I_i} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_1 N_0}{E_i A_i} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left(\underbrace{-2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} q l^2 \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot 1}_{I,IV} \underbrace{- 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} q l^2 \cdot l \cdot l}_{II,III} \right) +$$

$$+\frac{1}{EA}\cdot\left[\underbrace{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{l}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}ql\right)\cdot\sqrt{2}l}_{V,IX}+\underbrace{2\cdot\frac{1}{l}\cdot(-2ql)\cdot l}_{VI,VIII}+\underbrace{\left(-\frac{1}{l}\right)\cdot 2ql\cdot 2l}_{VII}\right]=$$

$$=-\frac{7}{12}\cdot\frac{ql^3}{EI}-8\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{ql}{EA}$$

Równanie metody sił ma postać

$$\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{10}=0$$

Po podstawieniu

$$\left[\frac{8}{3}\cdot\frac{l}{EI}+4\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{1}{EA\cdot l}\right]\cdot X_1-\frac{7}{12}\cdot\frac{ql^3}{EI}-8\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{ql}{EA}=0$$

Rozwiązanie powyższego równania jest następujące

$$X_1=-\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}=\frac{\frac{7}{12}\cdot\frac{ql^3}{I}+8\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{ql}{A}}{\frac{8}{3}\cdot\frac{l}{I}+4\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{1}{A\cdot l}}$$

Przyjmiemy dane:

- moment bezwładności dla dwuteownika 360: I = 19610 cm^4 (wg W. Bogucki, M. Żyburtowicz *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych*,Wyd. 5, Warszawa1984*)*
- pole przekroju kątownika równoramiennego 40x40x4: F = 3,08 cm^2 (j.w.)

Ponadto przyjęto, że l = 1 m, q = 10 kN/m.
Pręty skratowania złożone są z dwóch kątowników, a więc A = 2F = 6,16 cm^2.

$I=19610\ \text{cm}^4=1961\cdot 10^{-7}\,\text{m}^4$

$A=6{,}16\ \text{cm}^2=616\cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$

Wartość nadliczbowej wynosi

$$X_1=\frac{\frac{7}{12}\cdot\frac{10\ \text{kN/m}\cdot 1\,\text{m}^3}{1961\cdot 10^{-7}\ \text{m}^4}+8\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{10\ \text{kN/m}\cdot 1\,\text{m}}{616\cdot 10^{-6}\ \text{m}^2}}{\frac{8}{3}\cdot\frac{1\,\text{m}}{1961\cdot 10^{-7}\ \text{m}^4}+4\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{1}{616\cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\cdot 1\,\text{m}}}=11{,}7260\ \text{kNm}$$

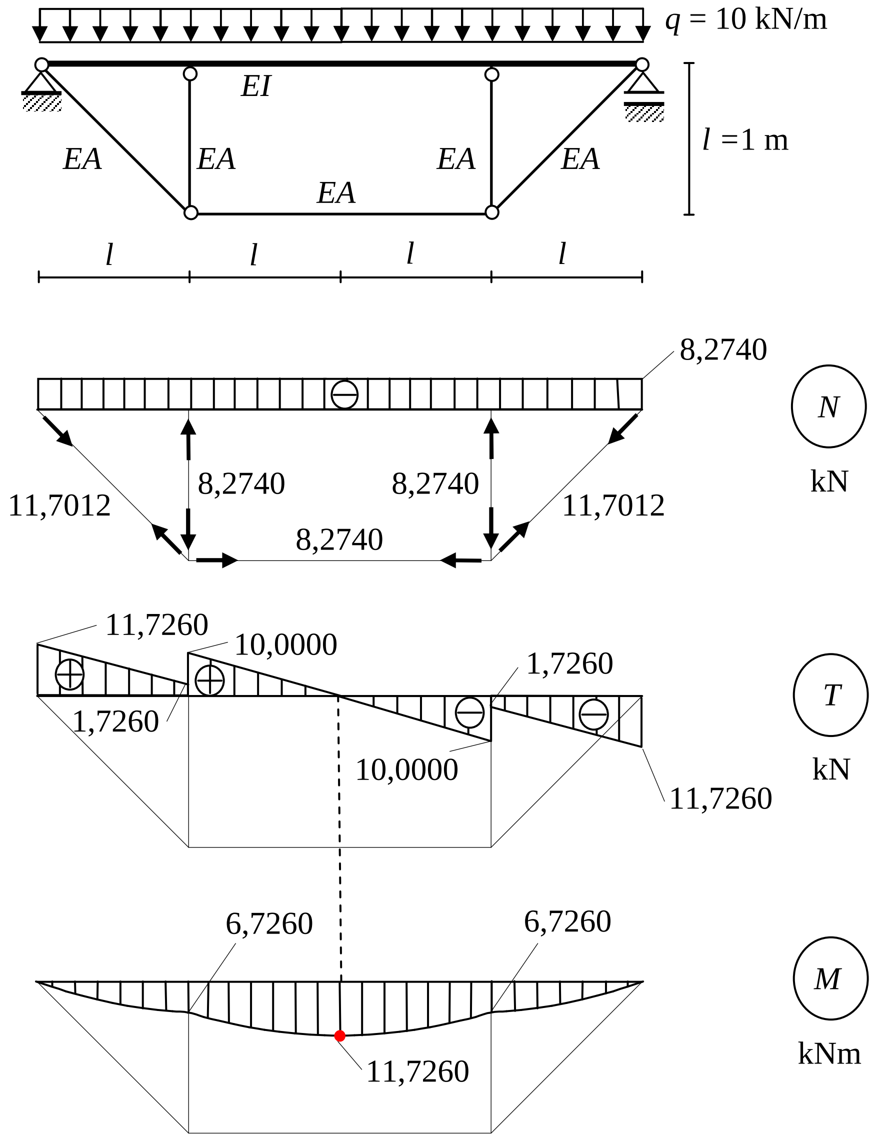
Po rozwiązaniu równania metody sił możemy wyznaczyć siły przekrojowe

$$N=N_1\cdot X_1+N_0$$

$$T=T_1\cdot X_1+T_0$$

$$M=M_1\cdot X_1+M_0$$

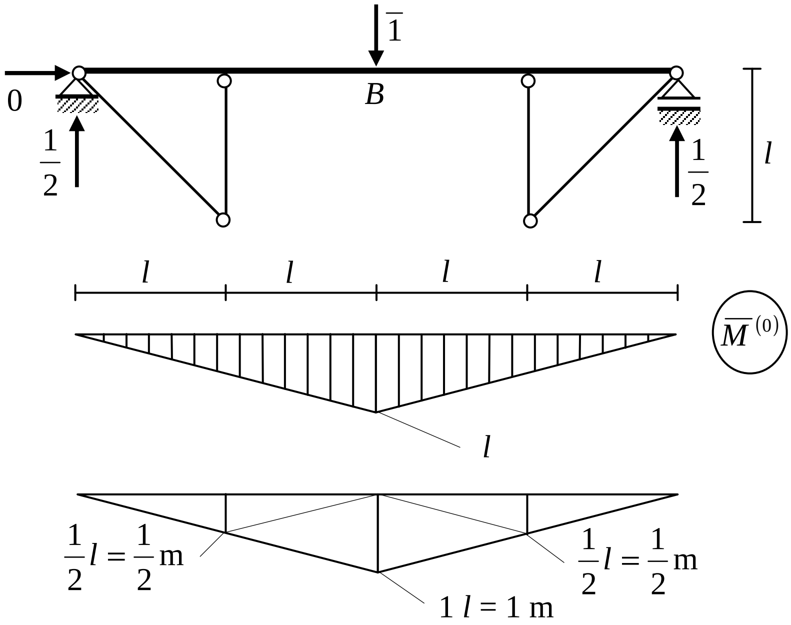
<u>Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym</u>



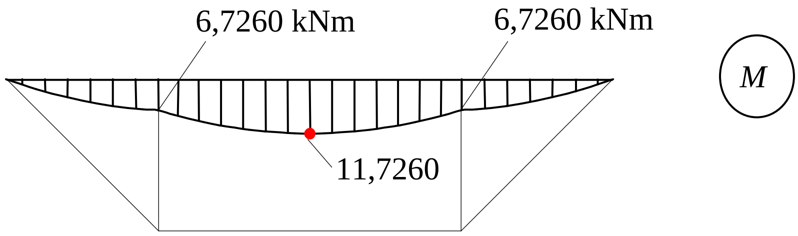
Polecenie do zadania obejmuje również wyznaczenie ugięcia w punkcie *B*. W celu uniknięcia wyznaczania sił przekrojowych od obciążenia jednostkową siłą w układzie statycznie niewyznaczalnym, skorzystamy z pierwszego twierdzenia redukcyjnego. Wirtualne obciążenie przyłożymy w punkcie *B* w układzie statycznie wyznaczalnym, utworzonym przez usunięcie nadliczbowego więzu (nie musi to być układ podstawowy, przyjęty do wyznaczenia wykresów sił przekrojowych).

<u>Wyznaczenie ugięcia w punkcie *B*</u>

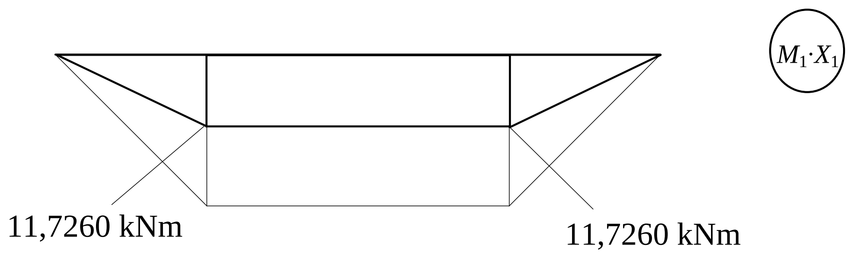
W przypadku wyznaczania ugięcia w punkcie *B* należy przyłożyć obciążenie wirtualne w postaci siły jednostkowej o kierunku pionowym działającej w tym punkcie, a następnie wyznaczyć wykres momentów gnących. W poniższym układzie w prętach dwuprzegubowych siły podłużne są równe zeru.

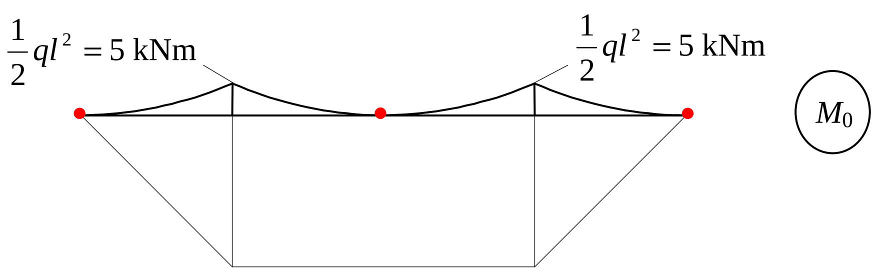


Przed przystąpieniem do wyznaczenia ugięcia w punkcie *B* wykres momentów gnących od obciążenie zewnętrznego w układzie statycznie niewyznaczalnym przedstawimy jako wykresy składowe.



$$M = M_1 \cdot X_1 + M_0$$





Miejsca występowania ekstremów na wykresie momentów oznaczone są kolorem czerwonym. Całkowanie przeprowadzimy w przedziałach od *I* do *IV*.

$$v_B = \frac{1}{EI}\cdot\left\{\underbrace{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 11{,}7260\text{kNm}\cdot 1\text{m}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0{,}5\text{m} - \frac{1}{3}\cdot 5\text{kNm}\cdot 1\text{m}\cdot\frac{3}{4}\cdot 0{,}5\text{m}\right)}_{I,\,IV} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{2\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 5\text{kNm}\cdot 1\text{m}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot 0{,}5\text{m} + \frac{1}{4}\cdot 1{,}0\text{m}\right) + \frac{1}{2}\cdot(0{,}5\text{m} + 1{,}0\text{m})\cdot 1\text{m}\cdot 11{,}7260\text{kNm}\right]}_{II,\,III}\right\} =$$

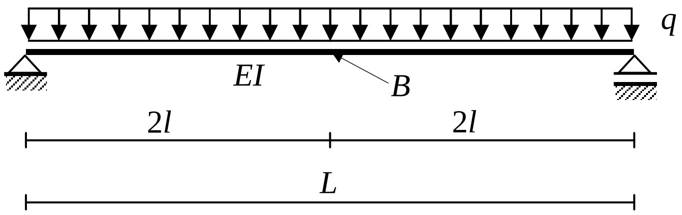
$$= \frac{18{,}1643\ \text{kNm}^3}{EI}$$

Przyjmując współczynnik sprężystości podłużnej dla stali węglowej $E = 2{,}09\cdot 10^5$MPa otrzymamy ugięcie w punkcie *B* równe

$$v_B = \frac{18{,}1643\ \text{kNm}^3}{2{,}09\cdot 10^5\,\text{MPa}\cdot 1961\cdot 10^{-7}\,\text{m}^4} = \frac{18{,}1643\ \text{kNm}^3}{2{,}09\cdot 10^8\,\text{kN/m}^2\cdot 1961\cdot 10^{-7}\,\text{m}^4} = 4{,}4319\cdot 10^{-4}\,\text{m} =$$

$$= 0{,}4432\text{mm}$$

Porównamy wyznaczone ugięcie ze strzałką ugięcia dla belki wolnopodpartej (bez skratowania) o tych samych wymiarach i tak samo obciążonej.



Skorzystamy ze znanego wzoru na strzałkę ugięcia dla belki wolnopodpartej obciążonej obciążeniem ciągłym na całej rozpiętości.

$$f = \frac{5}{384}\cdot\frac{qL^4}{EI}$$

$$v_{Bb} = \frac{5}{384}\cdot\frac{10\text{kN/m}\cdot(4\text{m})^4}{2{,}09\cdot 10^8\,\text{kN/m}^2\cdot 1961\cdot 10^{-7}\,\text{m}^4} = 8{,}1331\cdot 10^{-4}\,\text{m} = 0{,}8133\text{mm}$$

Wyznaczymy względny ubytek ugięcia po wzmocnieniu belki skratowaniem.

$$\frac{\Delta v_B}{v_{Bb}} = \frac{0{,}8133\text{mm} - 0{,}4432\text{mm}}{0{,}8133\text{mm}}\cdot 100\ \% = 45{,}5\ \%$$

Wynik ten świadczy o znacznym wzroście sztywności konstrukcji.

Obliczymy również względny przyrost ciężaru konstrukcji po wzmocnieniu belki (bez uwzględnienia ciężaru blach węzłowych).
Przyjmiemy dane:

- masa dwuteownika 360: m = 76,2 kg/m (wg W. Bogucki, M. Żyburtowicz *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych*,Wyd. 5, Warszawa1984)
- masa kątownika równoramiennego 40x40x4: m = 2,42 kg/m (j.w.)

Ponadto l = 1 m.
Pręty skratowania złożone są z dwóch kątowników.
Ciężar belki wolnopodpartej wynosi

$$G_b = 4\,\mathrm{m} \cdot 76{,}2\,\mathrm{kG/m} = 304{,}8\,\mathrm{kG} = 2{,}99\,\mathrm{kN}\,.$$

Ciężar belki ze skratowaniem wynosi

$$G_{bs} = 4\,\mathrm{m} \cdot 76{,}2\,\mathrm{kG/m} + 2 \cdot \left(2 \cdot 1\,\mathrm{m} + 2 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m}\right) \cdot 2{,}42\,\mathrm{kG/m} = 337{,}85\,\mathrm{kG} = 3{,}31\,\mathrm{kN}\,.$$

Względny przyrost ciężaru belki po wzmocnieniu jej skratowaniem jest równy

$$\frac{\Delta G}{G_{bs}} = \frac{3{,}31\mathrm{kN} - 2{,}99\mathrm{kN}}{3{,}31\mathrm{kN}} \cdot 100\ \% = 9{,}7\ \%$$

Zauważmy, że po wzmocnieniu belki skratowaniem wystąpił stosunkowo niewielki przyrost ciężaru konstrukcji w porównaniu do przyrostu jej sztywności.