

## Wprowadzenie

Wyznaczenie sił w prętach jest niezbędne w procesie projektowania kratownic. Na ich podstawie określamy wymiary przekrojów poprzecznych prętów (warunek wytrzymałości). W układach statycznie niewyznaczalnych nie dysponujemy wystarczającą ilością równań równowagi do wyznaczenia sił w prętach, a w przypadku układów zewnętrznie statycznie niewyznaczalnych również reakcji podporowych. Jedną z metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych (układów o nadliczbowych więzach) jest metoda sił. W układach rozwiązywanych metodą sił niewiadomymi są siły, a równania, z których są one wyznaczone, są związkami geometrycznymi. Sposób rozwiązywania układu statycznie niewyznaczalnego metodą sił jest następujący:

- Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu  $n$ .  
W przypadku płaskiej kratownicy z węzłami przegubowymi

$$n = r + p - 2 \cdot w$$

gdzie:

- $r$  - liczba składowych reakcji podpór
- $p$  - liczba prętów kratownicy
- $w$  - liczba węzłów kratownicy.

- Utworzenie układu podstawowego.

W rozwiązywanym układzie usuwamy  $n$  nadliczbowych więzów, tworząc w ten sposób układ podstawowy (statycznie wyznaczalny i geometrycznie niezmienny).

- Obciążenie układu podstawowego.

Układ podstawowy będzie pod względem statycznym równoważny rozpatrywanemu układowi statycznie niewyznaczalnemu, jeżeli poza obciążeniem zewnętrznym działającym na układ, w miejscach usuniętych więzów wprowadzimy nadliczbowe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - reakcje usuniętych więzów.

- Wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) i wyrazów wolnych układu równań kanonicznych metody sił.

Układ podstawowy będzie pod względem kinematycznym równoważny rozpatrywanemu układowi statycznie niewyznaczalnemu, jeżeli pod wpływem obciążenia zewnętrznego oraz niewiadomych nadliczbowych  $X_1, X_2, \dots, X_n$  przemieszczenia w układzie podstawowym w miejscach usuniętych  $n$  więzów będą równe zeru. Przyjmijmy założenie, że rozpatrywana konstrukcja wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego. Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujący układ  $n$  równań z  $n$  niewiadomymi:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \delta_{20} = 0$$

.....

$$\delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \delta_{n0} = 0$$

gdzie:

- $\delta_{jk}$  - przemieszczenie uogólnione odpowiadające nadliczbowej  $X_j$  wywołane działaniem nadliczbowej  $X_k = 1$

$\delta_{j0}$  - przemieszczenie uogólnione odpowiadające nadliczbowej  $X_j$  wywołane działaniem obciążenia zewnętrznego.

Korzystamy ze wzoru Maxwella-Mohra. Uwzględniając, że siły na całej długości każdego pręta mają stałą wartość otrzymujemy

$$\delta_{jk} = \sum_{i=1}^p \int_0^{l_i} \frac{N_j^{(i)} N_k^{(i)}}{E_i A_i} ds = \sum_{i=1}^p \frac{N_j^{(i)} N_k^{(i)} l_i}{E_i A_i}$$

$$\delta_{j0} = \sum_{i=1}^p \int_0^{l_i} \frac{N_j^{(i)} N_0^{(i)}}{E_i A_i} ds = \sum_{i=1}^p \frac{N_j^{(i)} N_0^{(i)} l_i}{E_i A_i}$$

gdzie:

$N_j^{(i)}$  - siła w  $i$ -tym pręcie w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym wywołana działaniem nadliczbowej  $X_j = 1$

$N_k^{(i)}$  - siła w  $i$ -tym pręcie w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym wywołana działaniem nadliczbowej  $X_k = 1$

$N_0^{(i)}$  - siła w  $i$ -tym pręcie w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym wywołana działaniem obciążenia zewnętrznego

$E_i A_i$  - sztywność ściskania  $i$ -tego pręta

$p$  - liczba prętów kratownicy.

Z twierdzenia o wzajemności przemieszczeń wynika, że

$$\delta_{jk} = \delta_{kj}$$

W celu obliczenia wartości powyższych całek należy wyznaczyć siły w prętach w układzie podstawowym obciążonym kolejno siłami  $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$  oraz obciążeniem zewnętrznym.

- Wyznaczenie sił w prętach w układzie statycznie niewyznaczalnym.

Po rozwiązaniu układu równań metody sił możemy wyznaczyć siły w prętach

$$N^{(i)} = N_1^{(i)} \cdot X_1 + N_2^{(i)} \cdot X_2 + \dots + N_n^{(i)} \cdot X_n + N_0^{(i)}$$

gdzie:

$N^{(i)}$  - siła w  $i$ -tym pręcie w układzie statycznie niewyznaczalnym

$N_j^{(i)}$  - siła w  $i$ -tym pręcie w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym wywołana działaniem nadliczbowej  $X_j = 1$

$N_0^{(i)}$  - siła w  $i$ -tym pręcie w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym wywołana działaniem obciążenia zewnętrznego

$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$  - wartości nadliczbowych otrzymane jako rozwiązanie układu równań metody sił.