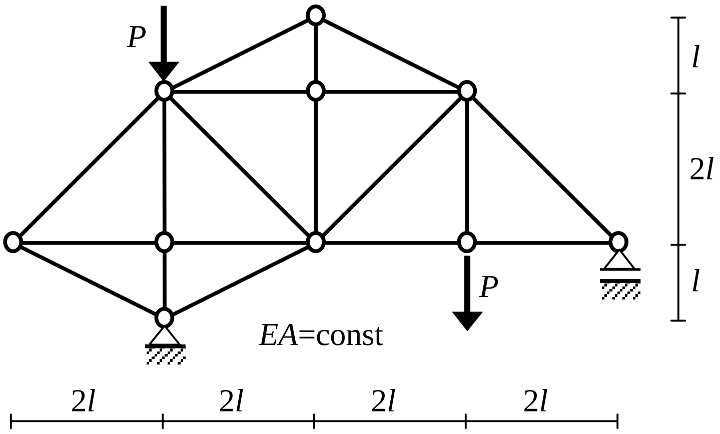
Przykład 5.1. Kratownica dwukrotnie statycznie niewyznaczalna

Polecenie: korzystając z metody sił wyznaczyć siły w prętach poniższej kratownicy.



Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od obliczenia stopnia statycznej niewyznaczalności układu. W przypadku płaskiej kratownicy z węzłami przegubowymi

$$n = r + p - 2 \cdot w$$

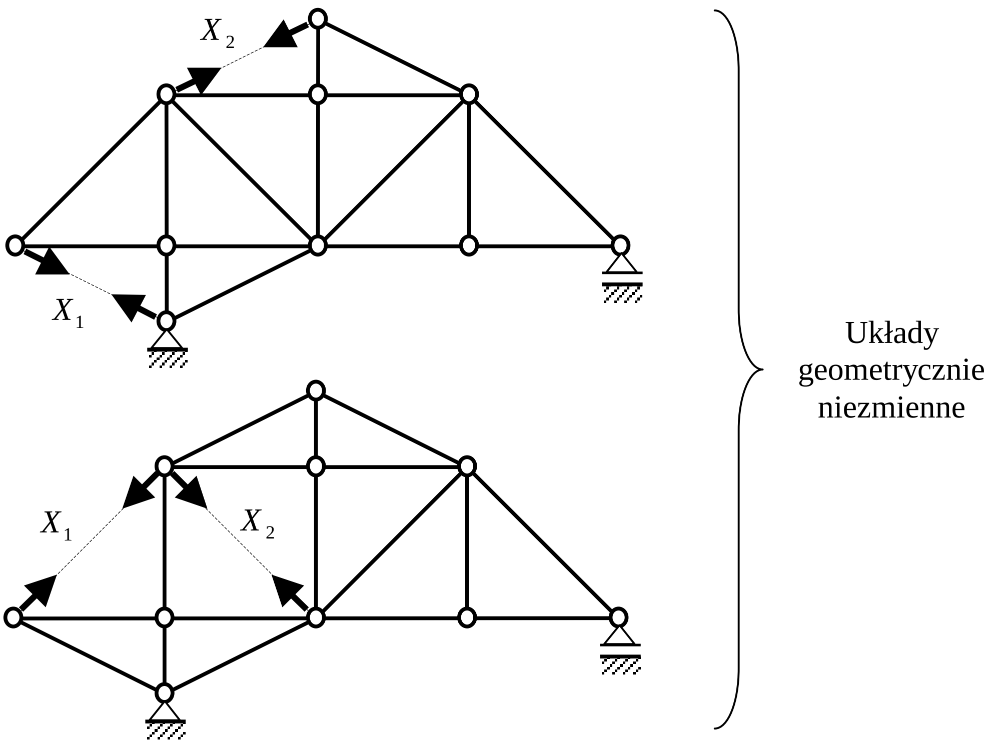
gdzie:

- r - liczba składowych reakcji podpór
- p - liczba prętów kratownicy
- w - liczba węzłów kratownicy.

W rozpatrywanym układzie stopień statycznej niewyznaczalności wynosi

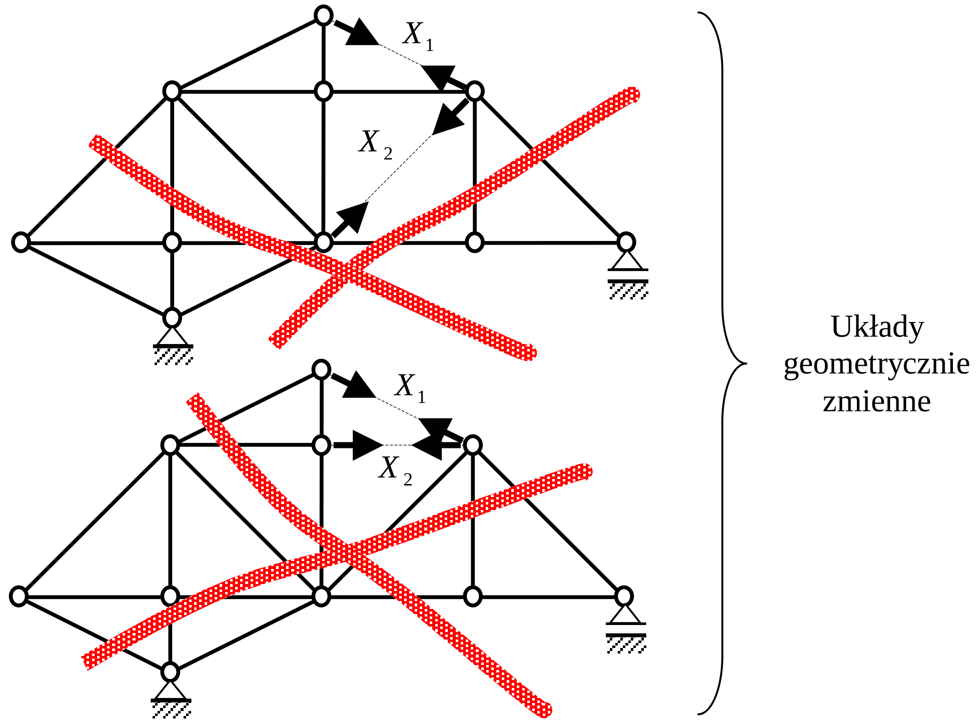
$$n = 3 + 19 - 2 \cdot 10 = 2$$

Układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny. Tworzymy układ podstawowy statycznie wyznaczalny przez usunięcie dwóch nadliczbowych więzów. Musi to być układ geometrycznie niezmienny. Istnieje wiele takich schematów. Poniżej podano dwa przykłady.

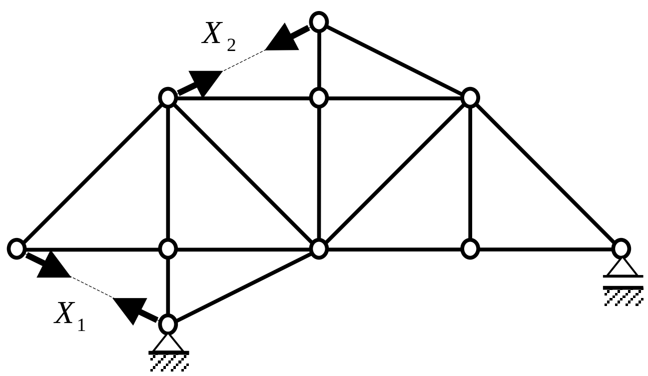


Po usunięciu nadliczbowych więzów należy sprawdzić, czy otrzymany układ jest geometrycznie niezmienny. Układ geometrycznie zmienny nie może być układem podstawowym. Jako układ podstawowy przyjmiemy pierwszy spośród powyższych, geometrycznie niezmiennych układów.

Poniżej pokazane są układy geometrycznie zmienne otrzymane po usunięciu dwóch więzów w rozpatrywanej, dwukrotnie statycznie niewyznaczalnej kratownicy. Nie można również przyjąć jako nadliczbowej żadnej z reakcji podporowych, ponieważ układ jest zewnętrznie statycznie wyznaczalny (reakcje podpór mogą być obliczone z równań równowagi całego układu).

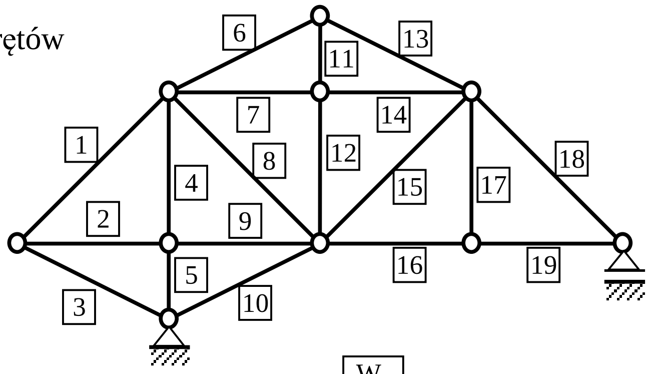


Siły w prętach nie zależą od przyjętego układu podstawowego. Wybór tego układu jest jednak istotny, ponieważ od niego zależy, czy rozwiązanie zadania będzie mniej lub bardziej pracochłonne. Poniższy rysunek przedstawia przyjęty do obliczeń układ podstawowy. W tak przyjętym układzie podstawowym siły wyznaczone w stanie $X_1 = 1$ możemy wykorzystać również w stanie $X_2 = 1$ ze względu na budowę rozpatrywanej kratownicy (przesztywniony fragment kratownicy ma środek symetrii).

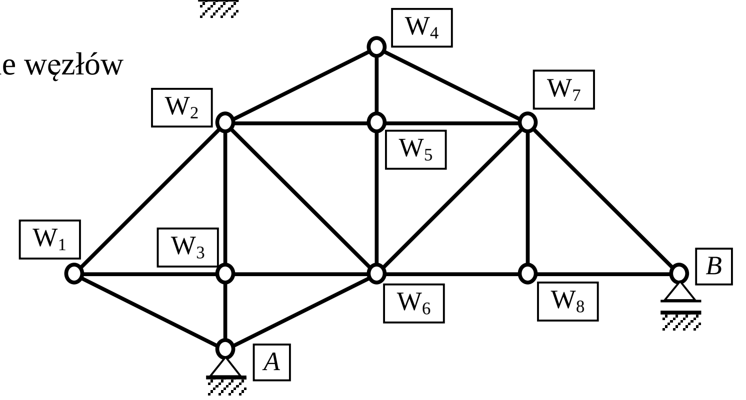


Przed przystąpieniem do obliczeń ponumerujemy pręty i węzły.

Oznaczenie prętów

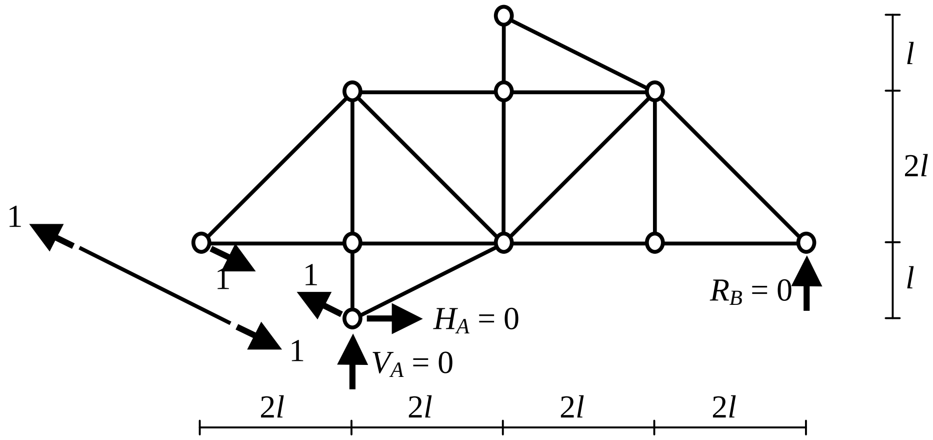


Oznaczenie węzłów



Wyznaczamy siły w prętach wywołane przez jednostkowe siły nadliczbowe i obciążenie zewnętrzne w układzie podstawowym.

Stan $X_1 = 1$



W rozpatrywanym stanie obciążeniem są dwie jednostkowe siły o przeciwnych zwrotach, mające wspólną linię działania (układ sił równoważących się). Otrzymamy, więc wszystkie składowe reakcji podporowych zerowe. Siły S_6, S_7, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17}, S_{18}, S_{19} są równe zero. W celu wyznaczenia pozostałych sił w prętach kratownicy należy zapisać równania równowagi dla węzłów W_1, W_2, W_3, W_A oraz W_6. Równania zapisano zakładając, że wszystkie siły są rozciągające.

$$\sum_i P_{iy}^{W_1} = 0 \qquad -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_1} = 0 \qquad S_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_2} = 0 \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot S_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot S_8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_8 = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

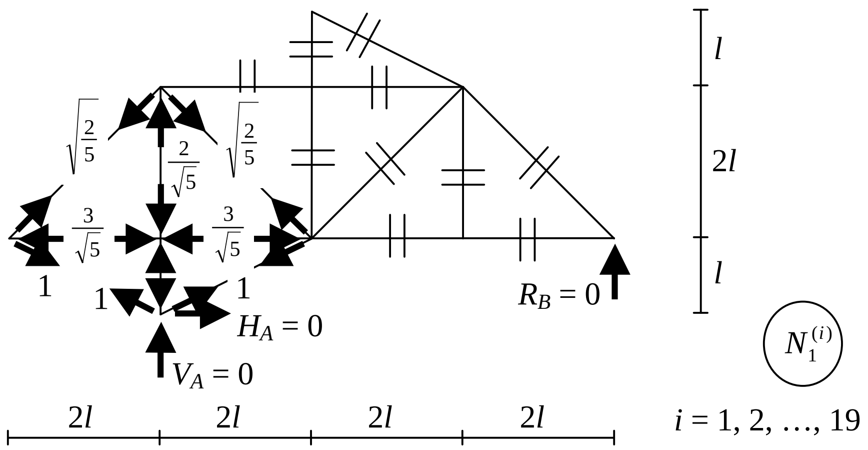
$$\sum_i P_{iy}^{W_2} = 0 \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot S_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot S_8 - S_4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_4 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_3} = 0 \qquad -S_2 + S_9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_9 = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

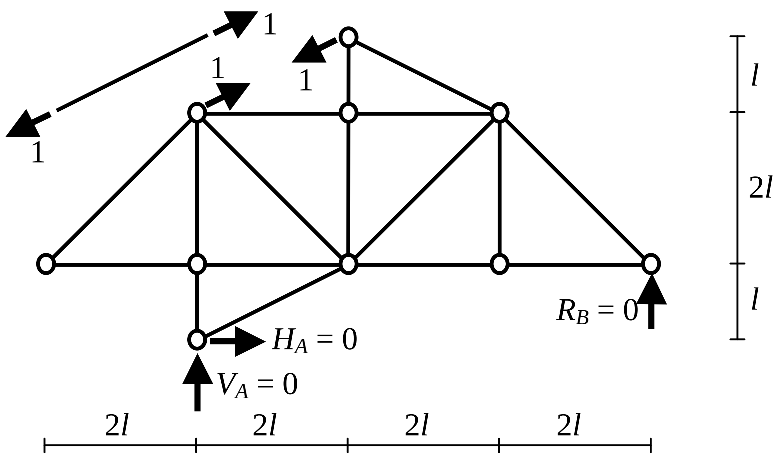
$$\sum_i P_{iy}^{W_3} = 0 \qquad -S_5 + S_4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_5 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_A} = 0 \qquad -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot S_{10} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{10} = 1$$

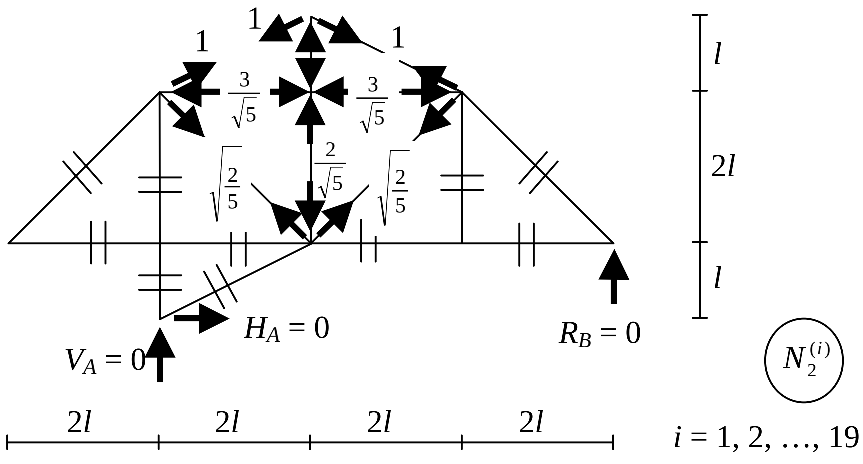
Pozostałe trzy równania równowagi dla węzłów W_A i W_6 spełnione są tożsamościowo.



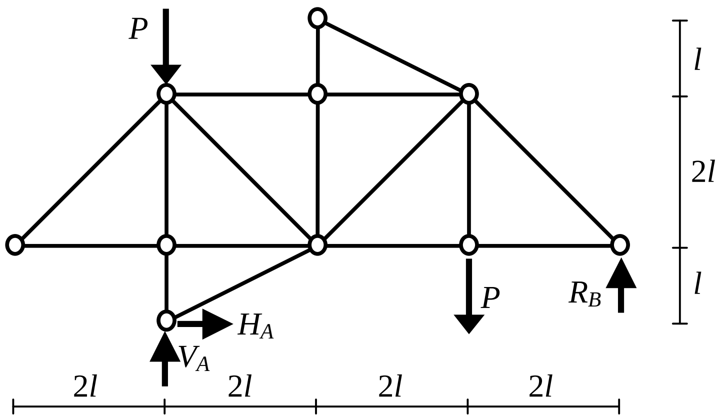
Stan $X_2 = 1$



W rozpatrywanym stanie obciążeniem są dwie jednostkowe siły o przeciwnych zwrotach, mające wspólną linię działania (układ sił równoważących się). Otrzymujemy, więc wszystkie składowe reakcji podporowych zerowe. Siły S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_9, S_{10}, S_{16}, S_{17}, S_{18}, S_{19} są równe zero. Pozostałe siły w prętach kratownicy możemy wyznaczyć z równań równowagi dla węzłów W_2, W_4, W_5, W_6 oraz W_7. Możemy również wykorzystać podobieństwo budowy fragmentu kratownicy i obciążenia w stanie $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ tych części układu, w których występują niezerowe siły.



Stan zerowy (obciążenie zewnętrzne)



Wyznaczamy reakcje podporowe:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A = 0$$

$$\sum_i M_{iA} = 0: \qquad R_B \cdot 6l - P \cdot 4l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_B = \frac{2}{3}P$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \qquad V_A + R_B - P - P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_A = \frac{4}{3}P$$

Siły S_1, S_2, S_3, S_6, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13} są równe zero. Pozostałe siły w prętach kratownicy wyznaczamy z poniższych równań równowagi dla węzłów.

$$\sum_i P_{iy}^{A} = 0 \qquad V_A + S_5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_5 = -\frac{4}{3}P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_3} = 0 \qquad S_4 - S_5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_4 = -\frac{4}{3}P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_2} = 0 \qquad -S_4 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_8 - P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} P$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_2} = 0 \qquad S_7 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_7 = -\frac{1}{3} P$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_5} = 0 \qquad -S_7 + S_{14} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{14} = -\frac{1}{3} P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_6} = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_8 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{15} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{15} = -\frac{\sqrt{2}}{3} P$$

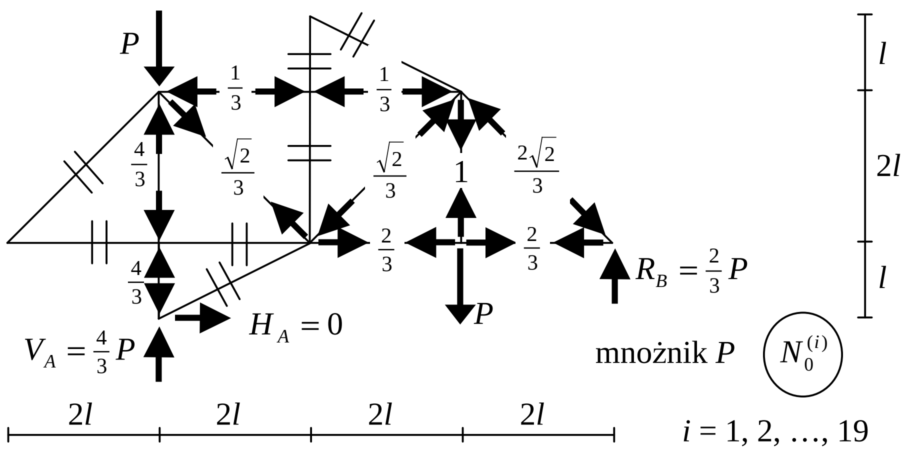
$$\sum_i P_{ix}^{W_6} = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{15} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_8 + S_{16} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{16} = \frac{2}{3} P$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_8} = 0 \qquad -S_{16} + S_{19} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{19} = \frac{2}{3} P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_8} = 0 \qquad -P + S_{17} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{17} = P$$

$$\sum_i P_{ix}^{B} = 0 \qquad -S_{19} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{18} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_{18} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} P$$

Pozostałe trzy równania równowagi dla węzłów W_B i W_7 spełnione są tożsamościowo.



Sztywność ściskania wszystkich prętów jest stała i wynosi EA. Uwzględniając to otrzymujemy

$$\delta_{jk} = \sum_{i=1}^{p} \frac{N_j^{(i)} N_k^{(i)} l_i}{E_i A_i} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{p} N_j^{(i)} N_k^{(i)} l_i \qquad\qquad \delta_{j0} = \sum_{i=1}^{p} \frac{N_j^{(i)} N_0^{(i)} l_i}{E_i A_i} = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{p} N_j^{(i)} N_0^{(i)} l_i$$

Wyznaczenie współczynników przy nadliczbowych i wyrazów wolnych układu równań metody sił przeprowadzimy w tabeli. Ze względu na podobieństwo budowy przesztywnionego fragmentu kratownicy i obciążenia w stanie $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ mamy $\delta_{22} = \delta_{11}$.

i	l_i	$N_1^{(i)}$	$N_2^{(i)}$	$N_0^{(i)}$	$N_1^{(i)}N_1^{(i)}l_i$	$N_1^{(i)}N_2^{(i)}l_i$	$N_1^{(i)}N_0^{(i)}l_i$	$N_2^{(i)}N_0^{(i)}l_i$
1.	$2\sqrt{2}\,l$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0	$\frac{4\sqrt{2}}{5}l$	0	0	0
2.	$2l$	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	0	0	$\frac{18}{5}l$	0	0	0
3.	$\sqrt{5}l$	1	0	0	$\sqrt{5}l$	0	0	0
4.	$2l$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	0	$-\frac{4}{3}P$	$\frac{8}{5}l$	0	$\frac{16}{3\sqrt{5}}Pl$	0
5.	l	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	0	$-\frac{4}{3}P$	$\frac{4}{5}l$	0	$\frac{8}{3\sqrt{5}}Pl$	0
6.	$\sqrt{5}l$	0	1	0	0	0	0	0
7.	$2l$	0	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{3}P$	0	0	0	$\frac{2}{\sqrt{5}}Pl$
8.	$2\sqrt{2}\,l$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}P$	$\frac{4\sqrt{2}}{5}l$	$\frac{4\sqrt{2}}{5}l$	$\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}Pl$	$\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}Pl$
9.	$2l$	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	0	0	$\frac{18}{5}l$	0	0	0
10.	$\sqrt{5}l$	1	0	0	$\sqrt{5}l$	0	0	0
11.	l	0	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0
12.	$2l$	0	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0
13.	$\sqrt{5}l$	0	1	0	0	0	0	0
14.	$2l$	0	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{3}P$	0	0	0	$\frac{2}{\sqrt{5}}Pl$
15.	$2\sqrt{2}\,l$	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}P$	0	0	0	$-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}Pl$
16.	$2l$	0	0	$\frac{2}{3}P$	0	0	0	0
17.	$2l$	0	0	P	0	0	0	0
18.	$2\sqrt{2}\,l$	0	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}P$	0	0	0	0
19.	$2l$	0	0	$\frac{2}{3}P$	0	0	0	0

	δ_{11}	$\delta_{12}=\delta_{21}$	δ_{10}	δ_{20}
$\sum$	$\frac{16{,}3349\,l}{EA}$	$\frac{1{,}1314\,l}{EA}$	$\frac{4{,}4210\,Pl}{EA}$	$\frac{1{,}7889\,Pl}{EA}$

Układ równań metody sił ma postać

$$16{,}3349 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_1 + \ 1{,}1314 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_2 + 4{,}4210 \cdot \frac{Pl}{EA} = 0$$

$$1{,}1314 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_1 + 16{,}3349 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_2 + 1{,}7889 \cdot \frac{Pl}{EA} = 0$$

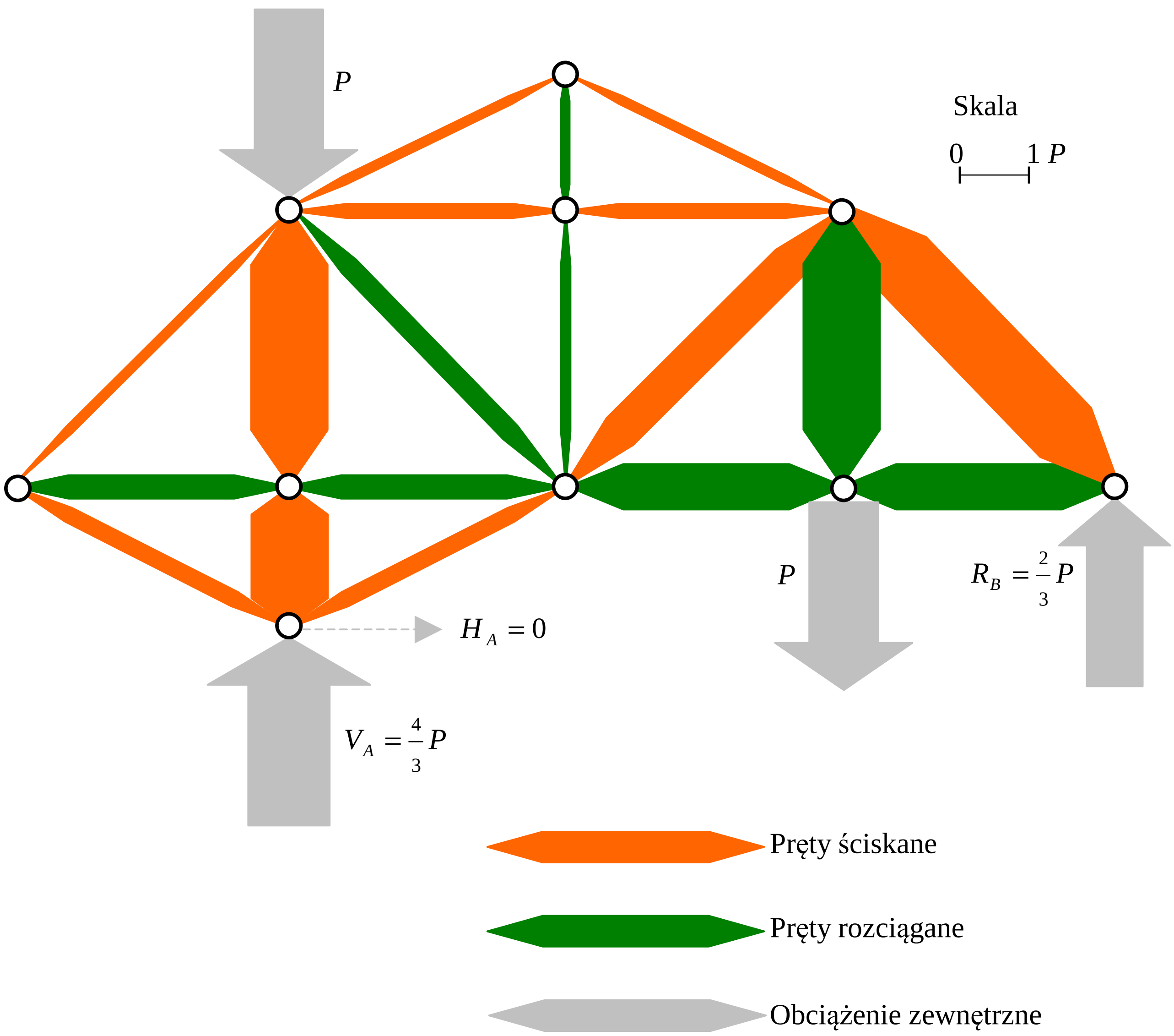
Rozwiązanie powyższego układu równań jest następujące

$$X_1 = -0{,}26433P \qquad\qquad X_2 = -0{,}09120P\,.$$

Po rozwiązaniu układu równań metody sił możemy wyznaczyć siły w prętach kratownicy w układzie statycznie niewyznaczalnym

$$N^{(i)} = N_1^{(i)} \cdot X_1 + N_2^{(i)} \cdot X_2 + ... + N_n^{(i)} \cdot X_n + N_0^{(i)}$$

Wartości sił w prętach kratownicy obliczamy w ostatniej kolumnie tabeli. Wyniki te przedstawia poniższy rysunek, na którym grubości „prętów” są proporcjonalne do wartości sił (w przyjętej skali).



i	$N_1^{(i)} \cdot X_1 +$		$N_2^{(i)} \cdot X_2 +$		$N_0^{(i)}$	$= N^{(i)}$
1.	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	0	**= −0,16718 *P***
2.	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	0	**= +0,35464 *P***
3.	1	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	0	**= −0,26433 *P***
4.	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	$-\frac{4}{3}P$	**= −1,09691 *P***
5.	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	$-\frac{4}{3}P$	**= −1,09691 *P***
6.	0	·(−0,26433)+	1	·(−0,09120)+	0	**= −0,09120 *P***
7.	0	·(−0,26433)+	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	·(−0,09120)+	$-\frac{1}{3}P$	**= −0,21097 *P***
8.	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	·(−0,26433)+	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	·(−0,09120)+	$\frac{\sqrt{2}}{3}P$	**= +0,24655 *P***
9.	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	0	**= +0,35464 *P***
10.	1	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	0	**= −0,26433 *P***
11.	0	·(−0,26433)+	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	·(−0,09120)+	0	**= +0,08158 *P***
12.	0	·(−0,26433)+	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	·(−0,09120)+	0	**= +0,08158 *P***
13.	0	·(−0,26433)+	1	·(−0,09120)+	0	**= −0,09120 *P***
14.	0	·(−0,26433)+	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	·(−0,09120)+	$-\frac{1}{3}P$	**= −0,21097 *P***
15.	0	·(−0,26433)+	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	·(−0,09120)+	$-\frac{\sqrt{2}}{3}P$	**= −0,52909 *P***
16.	0	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	$\frac{2}{3}P$	**= +0,66667 *P***
17.	0	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	P	**= +1,00000 *P***
18.	0	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}P$	**= −0,94281 *P***
19.	0	·(−0,26433)+	0	·(−0,09120)+	$\frac{2}{3}P$	**= +0,66667 *P***