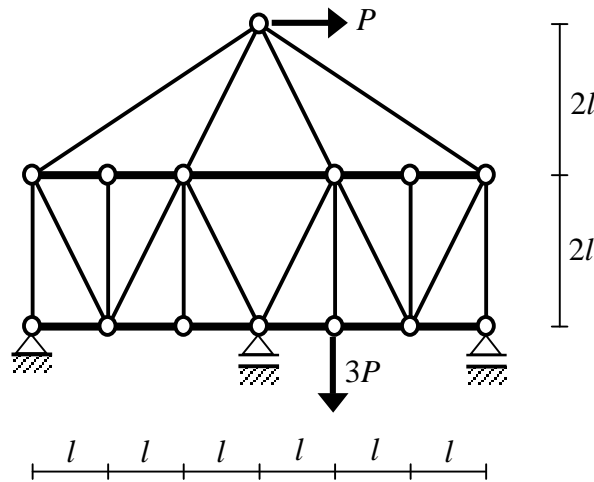


Przykład 5.2. Kratownica trzykrotnie statycznie niewyznaczalna

Polecenie: korzystając z metody sił wyznaczyć siły w prętach poniższej kratownicy. Przyjąć sztywność ściskania dla słupków i krzyżulców równą EA , a dla prętów pasa dolnego i górnego $2EA$.



Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od obliczenia stopnia statycznej niewyznaczalności układu. W przypadku płaskiej kratownicy z węzłami przegubowymi

$$n = r + p - 2 \cdot w$$

gdzie:

r - liczba składowych reakcji podpór

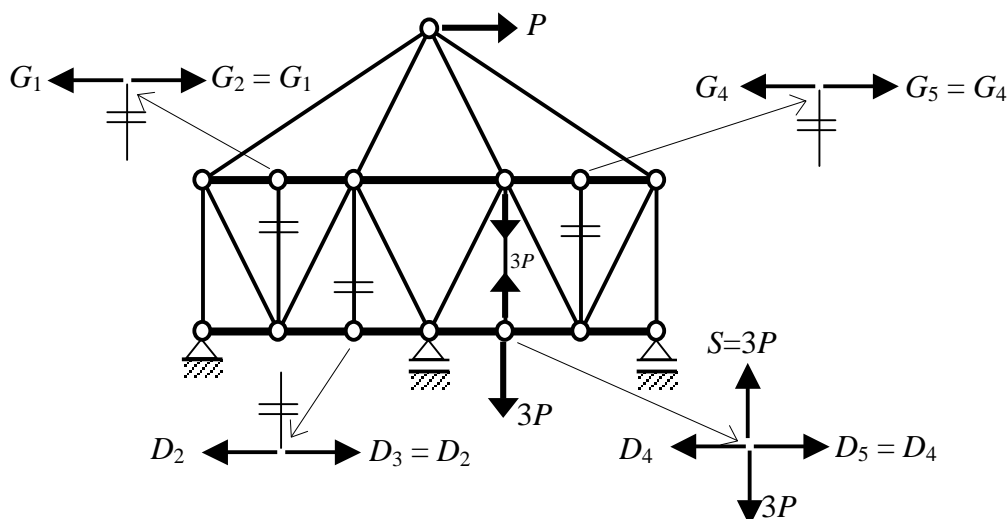
p - liczba prętów kratownicy

w - liczba węzłów kratownicy.

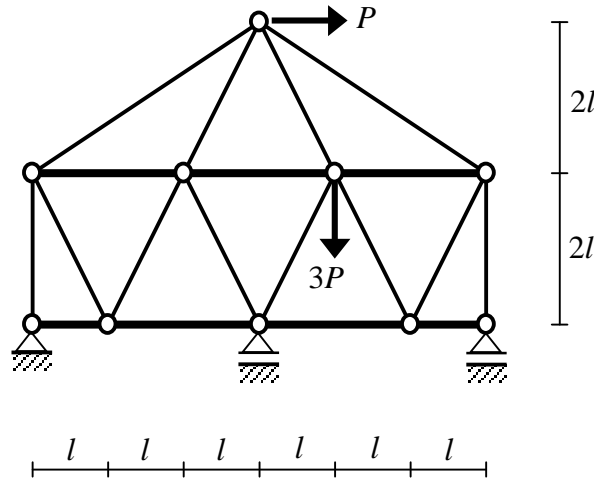
W rozpatrywanym układzie stopień statycznej niewyznaczalności wynosi

$$n = 4 + 27 - 2 \cdot 14 = 3$$

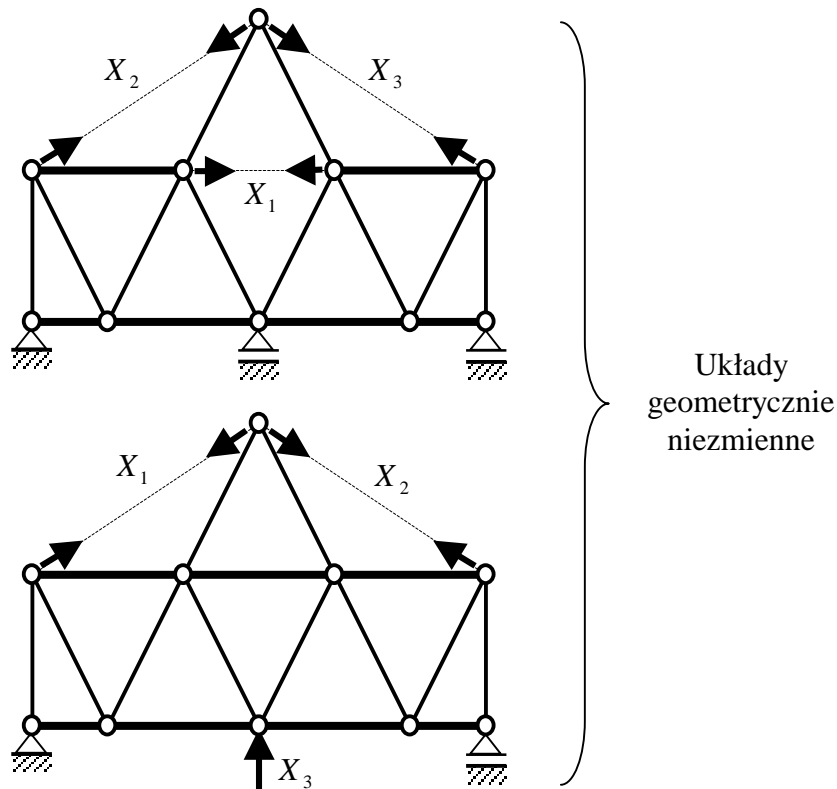
Pomimo iż rozważana kratownica jest statycznie niewyznaczalna, to siły w czterech słupkach można wyznaczyć z równań równowagi.



Uwzględniając ponadto jednakową sztywność ściskania dla prętów pasa dolnego i górnego oraz równości: $G_1 = G_2$, $G_4 = G_5$, $D_2 = D_3$, $D_4 = D_5$ możemy rozwiązać przedstawioną poniżej kratownicę o mniejszej ilości prętów.

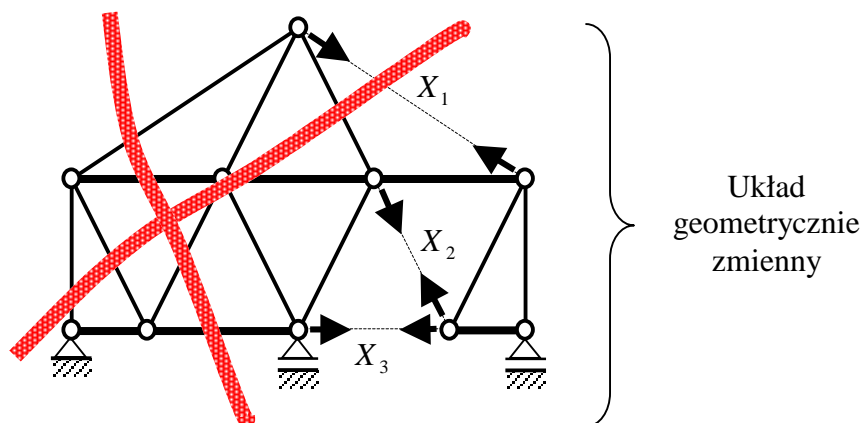


Układ jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny. Tworzymy układ podstawowy statycznie wyznaczalny przez usunięcie trzech nadliczbowych więzów. Musi to być układ geometrycznie niezmienny. Istnieje wiele takich schematów. Poniżej podano dwa przykłady.

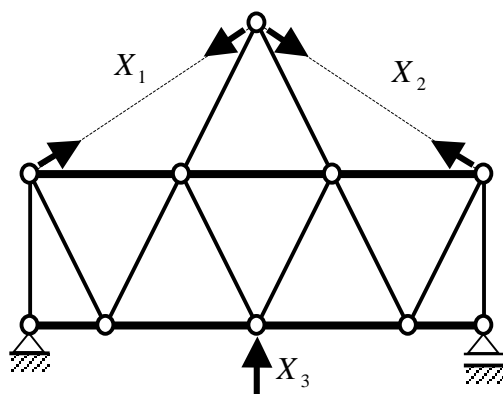


Rozpatrywana kratownica jest układem zewnętrznie statycznie niewyznaczalnym. Można, więc przyjąć jako jedną z trzech nadliczbowych reakcję podporową o kierunku pionowym. Po usunięciu nadliczbowych więzów należy sprawdzić, czy otrzymany układ jest geometrycznie niezmienny. Układ geometrycznie zmienny nie może być układem podstawowym. Jako układ podstawowy przyjmiemy drugi spośród powyższych, geometrycznie niezmiennych układów.

Poniżej pokazany jest układ geometrycznie zmienny otrzymany po usunięciu trzech więzów w rozpatrywanej, trzykrotnie statycznie niewyznaczalnej kratownicy.

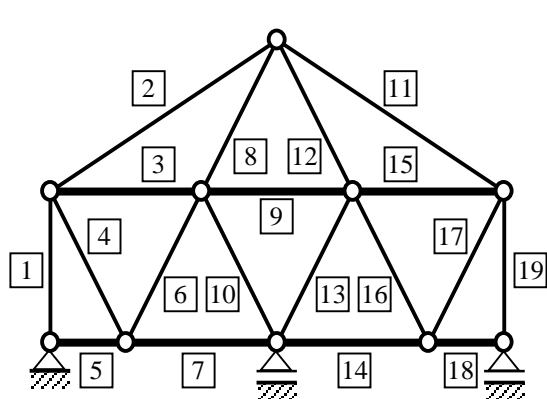


Siły w prętach nie zależą od przyjętego układu podstawowego. Wybór tego układu jest jednak istotny, ponieważ od niego zależy, czy rozwiązanie zadania będzie mniej lub bardziej pracochłonne. Poniższy rysunek przedstawia przyjęty do obliczeń układ podstawowy. W tak przyjętym układzie podstawowym siły w prętach wyznaczone w stanie $X_1 = 1$ możemy wykorzystać również w stanie $X_2 = 1$ ze względu na symetryczną budowę układu podstawowego (składowa pozioma reakcji na podporze nieprzesuwnej jest równa zero w stanach $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$).

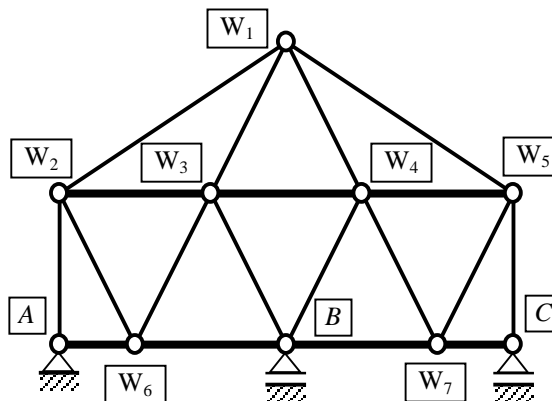


Pzed przystąpieniem do obliczeń ponumerujemy pręty i węzły.

Oznaczenie prętów

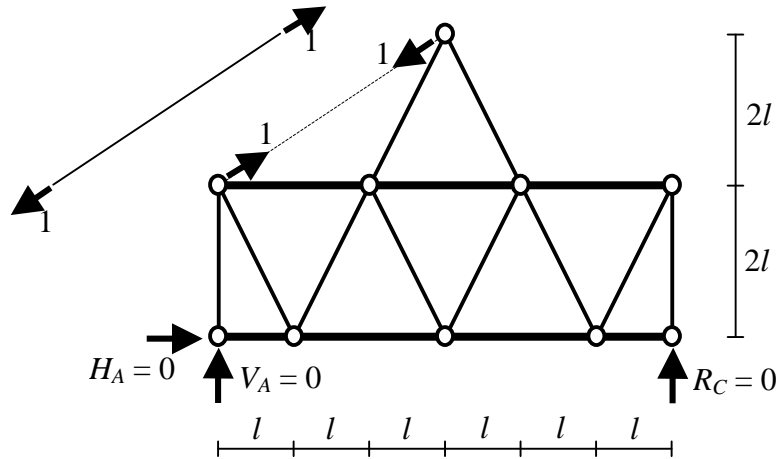


Oznaczenie węzłów

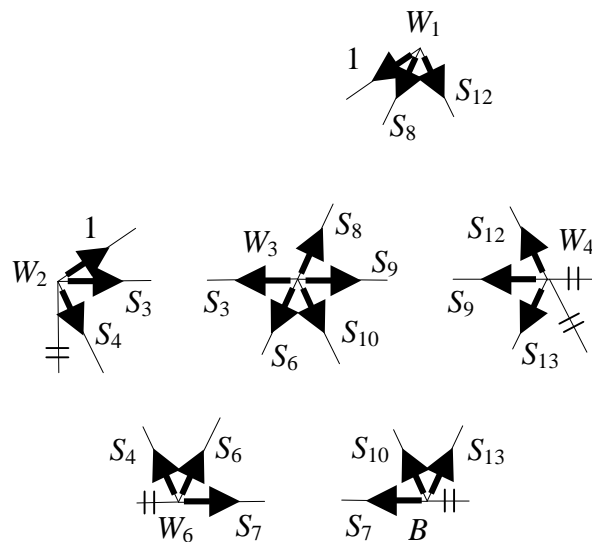


Wyznaczamy siły w prętach wywołane przez jednostkowe siły nadliczbowe i obciążenie zewnętrzne w układzie podstawowym.

Stan $X_1 = 1$



W rozpatrywanym stanie obciążeniem są dwie jednostkowe siły o przeciwnych zwrotach, mające wspólną linię działania (układ sił równoważących się). Otrzymamy, więc wszystkie składowe reakcji podporowych zerowe. Siły $S_1, S_5, S_{11}, S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17}, S_{18}, S_{19}$ są równe zero. W celu wyznaczenia pozostałych sił w prętach kratownicy należy zapisać równania równowagi dla węzłów W_1, W_2, W_3, W_4, W_6 oraz B .



$$\sum_i P_{iy}^{W_2} = 0 \quad 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_4 = \sqrt{\frac{5}{13}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_2} = 0 \quad S_3 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_4 + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = -\frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_6} = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_4 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_6 = -\sqrt{\frac{5}{13}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_6} = 0 \quad S_7 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_4 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_7 = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Dla węzła B otrzymamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

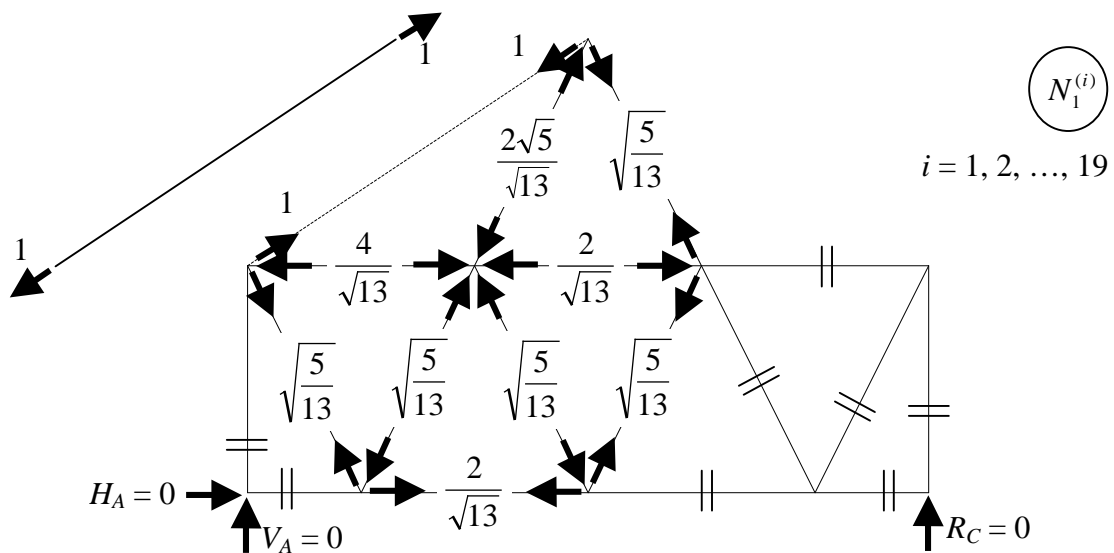
$$\left. \begin{aligned} \sum_i P_{ix}^B = 0 & \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{10} - S_7 = 0 \\ \sum_i P_{iy}^B = 0 & \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{10} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{10} = -\sqrt{\frac{5}{13}} \quad S_{13} = \sqrt{\frac{5}{13}}$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_4} = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} = 0 \Rightarrow S_{12} = \sqrt{\frac{5}{13}}$$

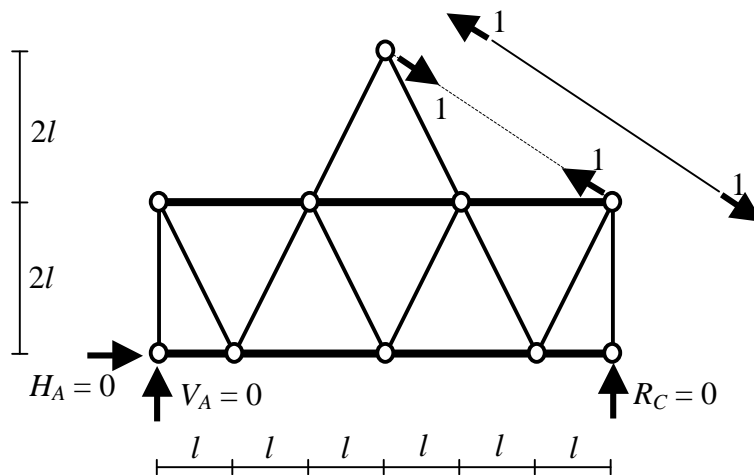
$$\sum_i P_{ix}^{W_4} = 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} - S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_1} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_8 - 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 0 \Rightarrow S_8 = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$$

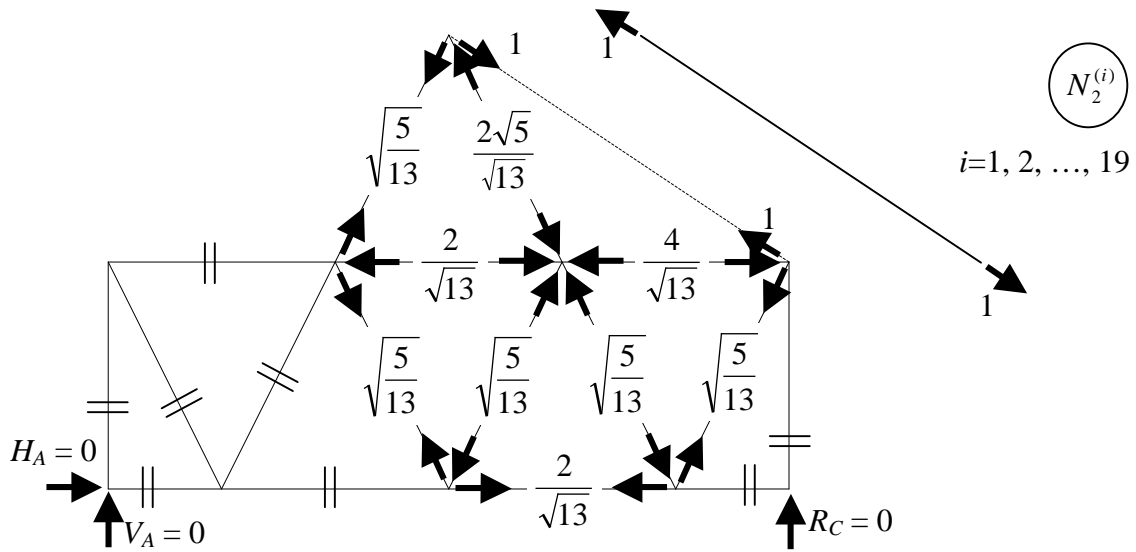
Pozostałe równania dla węzła W_1 i W_3 spełnione są tożsamościowo.



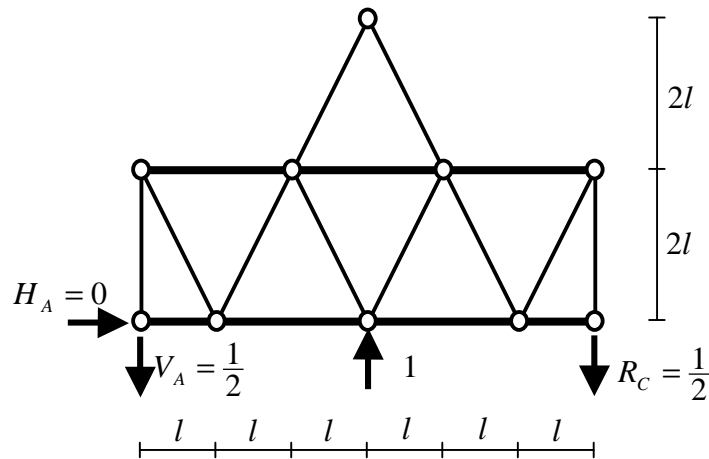
Stan $X_2 = 1$



Możemy wykorzystać symetryczną budowę układu podstawowego. Rozkład sił w prętach w stanie $X_2 = 1$ jest „lustrzanym odbiciem” rozkładu sił w stanie $X_1 = 1$.



Stan $X_3 = 1$



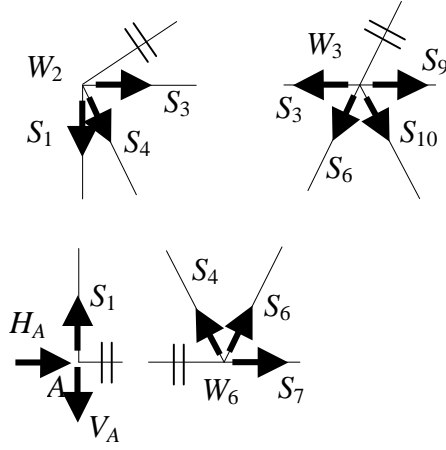
Skoro składowa pozioma reakcji na podporze A jest równa zero, to rozkład sił w prętach w stanie $X_3 = 1$ ma charakter symetryczny. Możemy obliczyć siły dla prętów tylko jednej połowy układu. Pozostałe siły wyznaczmy korzystając z symetrii. Wyznaczamy reakcje podporowe:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

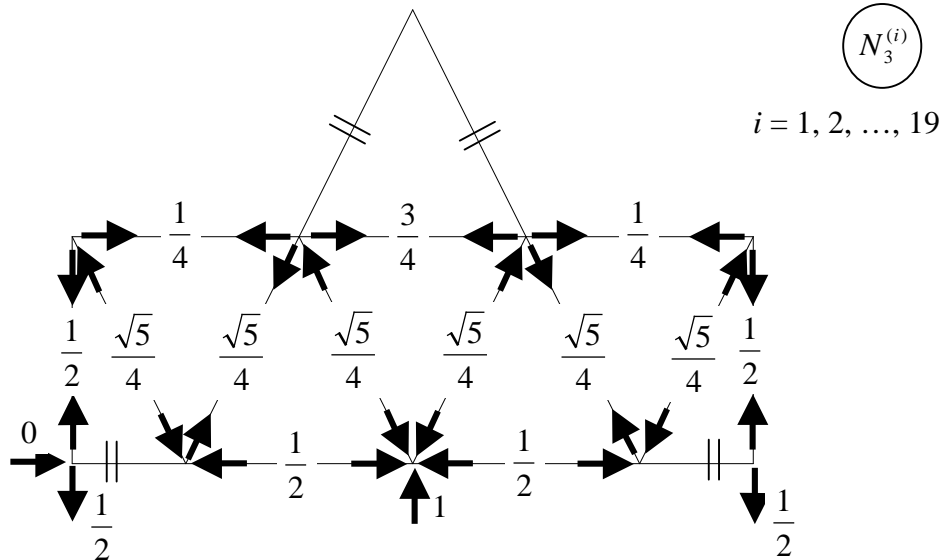
$$\sum_i M_{iA} = 0: \quad -R_C \cdot 6l + 1 \cdot 3l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{1}{2}$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \quad 1 - R_C - V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{2}$$

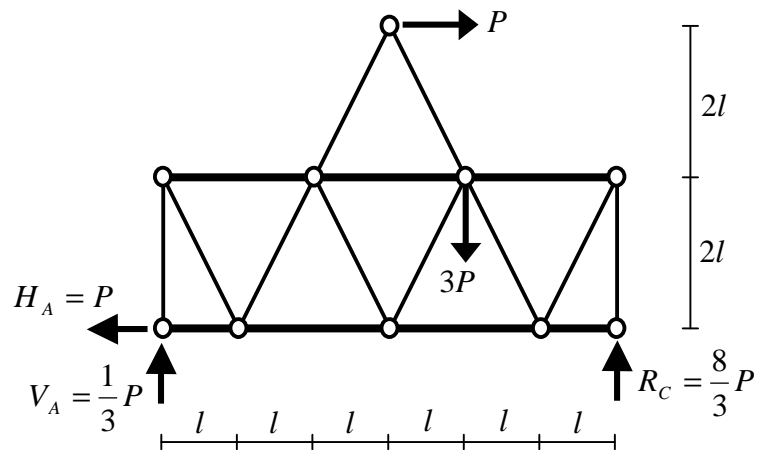
Siły $S_2, S_5, S_8, S_{11}, S_{12}, S_{18}$ są równe zero. Pozostałe siły w prętach kratownicy możemy wyznaczyć z równań równowagi dla węzłów.



$$\begin{aligned} \sum_i P_{iy}^A = 0 & \quad -V_A + S_1 = 0 & \Rightarrow & \quad S_1 = \frac{1}{2} \\ \sum_i P_{iy}^{W_2} = 0 & \quad -S_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_4 = 0 & \Rightarrow & \quad S_4 = -\frac{\sqrt{5}}{4} \\ \sum_i P_{ix}^{W_2} = 0 & \quad S_3 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_4 = 0 & \Rightarrow & \quad S_3 = \frac{1}{4} \\ \sum_i P_{iy}^{W_6} = 0 & \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_4 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_6 = 0 & \Rightarrow & \quad S_6 = \frac{\sqrt{5}}{4} \\ \sum_i P_{ix}^{W_6} = 0 & \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_6 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_4 + S_7 = 0 & \Rightarrow & \quad S_7 = -\frac{1}{2} \\ \sum_i P_{iy}^{W_3} = 0 & \quad -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_6 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{10} = 0 & \Rightarrow & \quad S_{10} = -\frac{\sqrt{5}}{4} \\ \sum_i P_{ix}^{W_3} = 0 & \quad S_9 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_6 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{10} - S_3 = 0 & \Rightarrow & \quad S_9 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



Stan zerowy (obciążenie zewnętrzne)

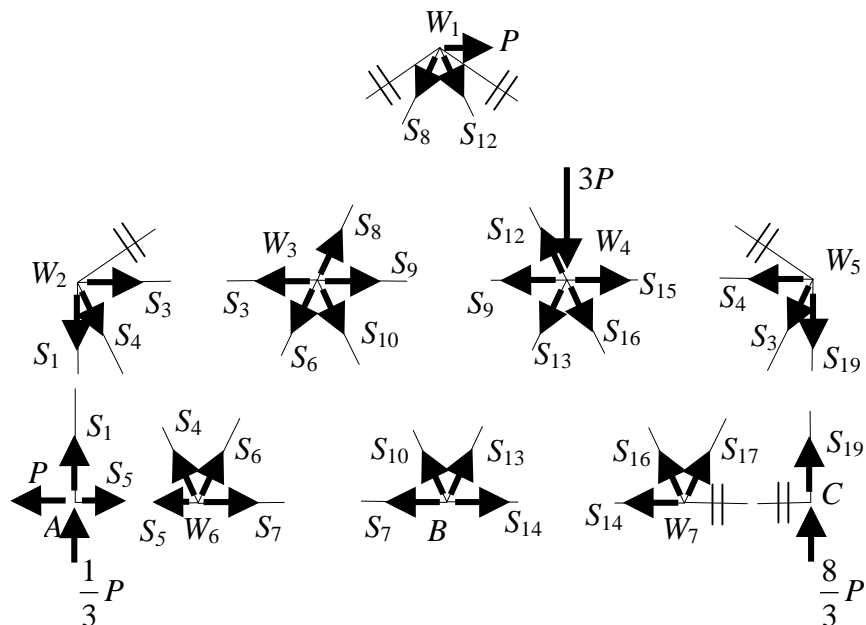


Wyznaczamy reakcje podporowe:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \quad -H_A + P = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = P$$

$$\sum_i M_{iA} = 0: \quad R_C \cdot 6l - P \cdot 4l - 3P \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{8}{3}P$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \quad V_A + R_C - 3P = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{3}P$$



Siły S_2 , S_{11} i S_{18} są równe zero. W celu wyznaczenia pozostałych sił w prętach kratownicy należy zapisać równania równowagi dla węzłów kratownicy.

$$\sum_i P_{ix}^A = 0 \quad -P + S_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_5 = P$$

$$\sum_i P_{iy}^A = 0 \quad \frac{1}{3}P + S_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = -\frac{1}{3}P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_2} = 0 \quad -S_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{\sqrt{5}}{6}P$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_2} = 0 \quad S_3 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = -\frac{1}{6}P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_6} = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_4 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_6 = -\frac{\sqrt{5}}{6}P$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_6} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_6 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_4 + S_7 - S_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_7 = \frac{4}{3}P$$

Dla węzła W_1 rozwiążemy układ dwu równań z dwiema niewiadomymi.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_i P_{ix}^{W_1} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_8 + P = 0 \\ \sum_i P_{iy}^{W_1} = 0 \quad -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_8 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S_8 = \frac{\sqrt{5}}{2}P, \quad S_{12} = -\frac{\sqrt{5}}{2}P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_3} = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_8 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_6 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{10} = \frac{2\sqrt{5}}{3}P$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_3} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_8 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{10} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_6 + S_9 - S_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_9 = -\frac{3}{2}P$$

$$\sum_i P_{iy}^B = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{10} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{13} = -\frac{2\sqrt{5}}{3}P$$

$$\sum_i P_{ix}^B = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{10} + S_{14} - S_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{14} = \frac{8}{3}P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_4} = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{16} - 3P = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{16} = -\frac{4\sqrt{5}}{3}P$$

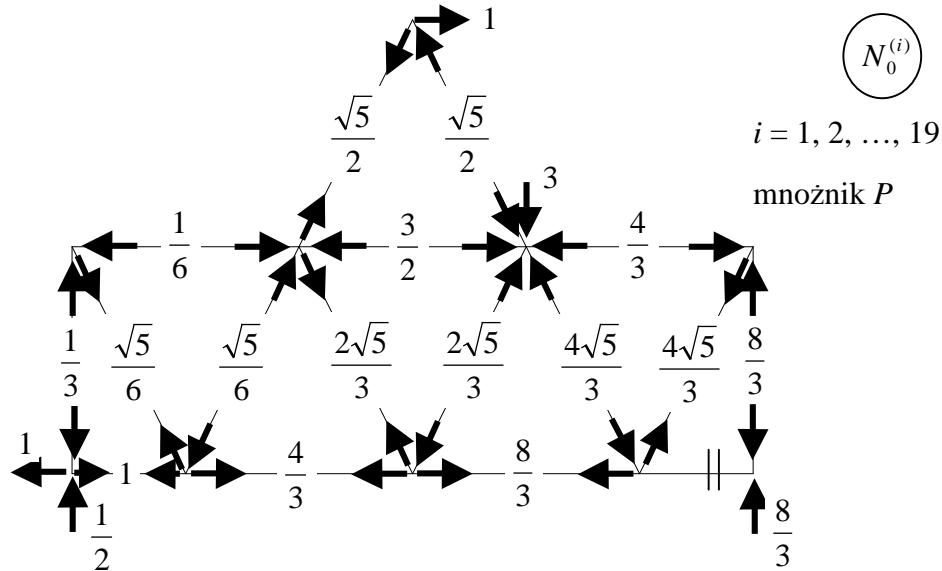
$$\sum_i P_{ix}^{W_4} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{16} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} - S_9 + S_{15} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{15} = -\frac{4}{3}P$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_7} = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{16} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{17} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{17} = \frac{4\sqrt{5}}{3}P$$

$$\sum_i P_{ix}^{W_7} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{17} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{16} + S_{18} - S_{14} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{18} = 0$$

$$\sum_i P_{iy}^{W_5} = 0 \quad -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{17} - S_{19} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{19} = -\frac{8}{3}P$$

Pozostałe równania równowagi dla węzła W_5 i C spełnione są tożsamościowo.



Sztywność ściskania oraz siła podłużna na całej długości każdego pręta mają stałą wartość. Uwzględniając to otrzymujemy

$$\delta_{jk} = \sum_{i=1}^p \int_0^{l_i} \frac{N_j^{(i)} N_k^{(i)}}{E_i A_i} ds = \sum_{i=1}^p \frac{N_j^{(i)} N_k^{(i)} l_i}{E_i A_i} \quad \delta_{j0} = \sum_{i=1}^p \int_0^{l_i} \frac{N_j^{(i)} N_0^{(i)}}{E_i A_i} ds = \sum_{i=1}^p \frac{N_j^{(i)} N_0^{(i)} l_i}{E_i A_i}$$

Wyznaczenie współczynników przy nadliczbowych i wyrazów wolnych układu równań metody sił przeprowadzimy w tabeli.

Ze względu na symetryczną budowę układu podstawowego i taki dobór nadliczbowych, że rozkład sił podłużnych w stanie $X_2 = 1$ jest „lustrzanym odbiciem” rozkładu sił w stanie $X_1 = 1$, a rozkład sił podłużnych w stanie $X_3 = 1$ ma charakter symetryczny otrzymamy

$$\delta_{13} = \sum_{i=1}^p \frac{N_1^{(i)} N_3^{(i)} l_i}{E_i A_i} = \delta_{23} = \sum_{i=1}^p \frac{N_2^{(i)} N_3^{(i)} l_i}{E_i A_i}$$

oraz

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^p \frac{N_1^{(i)} N_1^{(i)} l_i}{E_i A_i} = \delta_{22} = \sum_{i=1}^p \frac{N_2^{(i)} N_2^{(i)} l_i}{E_i A_i}$$

i	$\frac{l_i}{E_i A_i}$	$N_1^{(i)}$	$N_2^{(i)}$	$N_3^{(i)}$	$N_0^{(i)}$	$\frac{N_1^{(i)} \cdot N_1^{(i)} \cdot l_i}{E_i A_i}$	$\frac{N_3^{(i)} \cdot N_3^{(i)} \cdot l_i}{E_i A_i}$
1.	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
2.	$\sqrt{13}$	1	0	0	0	$\sqrt{13}$	0
3.	1	$-\frac{4}{\sqrt{13}}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{1}{16}$
4.	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	0	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{5\sqrt{5}}{13}$	$\frac{5\sqrt{5}}{16}$
5.	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	0	0
6.	$\sqrt{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{5\sqrt{5}}{13}$	$\frac{5\sqrt{5}}{16}$
7.	1	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{4}$
8.	$\sqrt{5}$	$-2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{20\sqrt{5}}{13}$	0
9.	1	$-\frac{2}{\sqrt{13}}$	$-\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{16}$
10.	$\sqrt{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$	$\frac{5\sqrt{5}}{13}$	$\frac{5\sqrt{5}}{16}$
11.	$\sqrt{13}$	0	1	0	0	0	0
12.	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$-2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	0	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5\sqrt{5}}{13}$	0
13.	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{3}$	$\frac{5\sqrt{5}}{13}$	$\frac{5\sqrt{5}}{16}$
14.	1	0	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{1}{4}$
15.	1	0	$-\frac{4}{\sqrt{13}}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{16}$
16.	$\sqrt{5}$	0	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{4\sqrt{5}}{3}$	0	$\frac{5\sqrt{5}}{16}$
17.	$\sqrt{5}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{4\sqrt{5}}{3}$	0	$\frac{5\sqrt{5}}{16}$
18.	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0
19.	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{3}$	0	$\frac{1}{2}$

i	$\frac{N_1^{(i)} \cdot N_2^{(i)} \cdot l_i}{E_i A_i}$	$\frac{N_1^{(i)} \cdot N_3^{(i)} \cdot l_i}{E_i A_i}$	$\frac{N_1^{(i)} \cdot N_0^{(i)} \cdot l_i}{E_i A_i}$	$\frac{N_2^{(i)} \cdot N_0^{(i)} \cdot l_i}{E_i A_i}$	$\frac{N_3^{(i)} \cdot N_0^{(i)} \cdot l_i}{E_i A_i}$
1.	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$
2.	0	0	0	0	0
3.	0	$-\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{3\sqrt{13}}$	0	$-\frac{1}{24}$
4.	0	$-\frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{13}}$	$\frac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{13}}$	0	$-\frac{5\sqrt{5}}{24}$
5.	0	0	0	0	0
6.	0	$-\frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{13}}$	$\frac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{13}}$	0	$-\frac{5\sqrt{5}}{24}$
7.	0	$-\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\frac{8}{3\sqrt{13}}$	0	$-\frac{2}{3}$
8.	$-\frac{10\sqrt{5}}{13}$	0	$-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{13}}$	0
9.	$\frac{4}{13}$	$-\frac{3}{2\sqrt{13}}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$-\frac{9}{8}$
10.	$-\frac{5\sqrt{5}}{13}$	$\frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{13}}$	$-\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{13}}$	$\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{13}}$	$-\frac{5\sqrt{5}}{6}$
11.	0	0	0	0	0
12.	$-\frac{10\sqrt{5}}{13}$	0	$-\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{13}}$	$\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	0
13.	$-\frac{5\sqrt{5}}{13}$	$-\frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{13}}$	$-\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{13}}$	$\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{13}}$	$\frac{5\sqrt{5}}{6}$
14.	0	0	0	$\frac{16}{3\sqrt{13}}$	$-\frac{4}{3}$
15.	0	0	0	$\frac{16}{3\sqrt{13}}$	$-\frac{1}{3}$
16.	0	0	0	$\frac{20\sqrt{5}}{3\sqrt{13}}$	$-\frac{5\sqrt{5}}{3}$
17.	0	0	0	$\frac{20\sqrt{5}}{3\sqrt{13}}$	$-\frac{5\sqrt{5}}{3}$
18.	0	0	0	0	0
19.	0	0	0	0	$-\frac{8}{3}$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \sum_{i=1}^p \frac{N_1^{(i)} N_1^{(i)} l_i}{E_i A_i} = 13,19194 \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{33} = \sum_{i=1}^p \frac{N_3^{(i)} N_3^{(i)} l_i}{E_i A_i} = 6,38013 \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^p \frac{N_1^{(i)} N_2^{(i)} l_i}{E_i A_i} = -4,85246 \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = \sum_{i=1}^p \frac{N_1^{(i)} N_3^{(i)} l_i}{E_i A_i} = -2,52116 \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^p \frac{N_1^{(i)} N_0^{(i)} l_i}{E_i A_i} = -5,99562 \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{20} = \sum_{i=1}^p \frac{N_2^{(i)} N_0^{(i)} l_i}{E_i A_i} = 20,84523 \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{30} = \sum_{i=1}^p \frac{N_3^{(i)} N_0^{(i)} l_i}{E_i A_i} = -14,88525 \frac{l}{EA}$$

Układ równań metody sił ma postać

$$\begin{aligned} 13,19194 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_1 - 4,85246 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_2 - 2,52116 \frac{l}{EA} \cdot X_3 - 5,99562 \cdot \frac{Pl}{EA} &= 0 \\ -4,85246 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_1 - 13,19194 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_2 - 2,52116 \frac{l}{EA} \cdot X_3 + 20,84523 \cdot \frac{Pl}{EA} &= 0 \\ -2,52116 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_1 - 2,52116 \cdot \frac{l}{EA} \cdot X_2 + 6,38013 \frac{l}{EA} \cdot X_3 - 14,88525 \cdot \frac{Pl}{EA} &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań jest następujące

$$X_1 = 0,50067P \quad X_2 = -0,98682P \quad X_3 = 2,14096P.$$

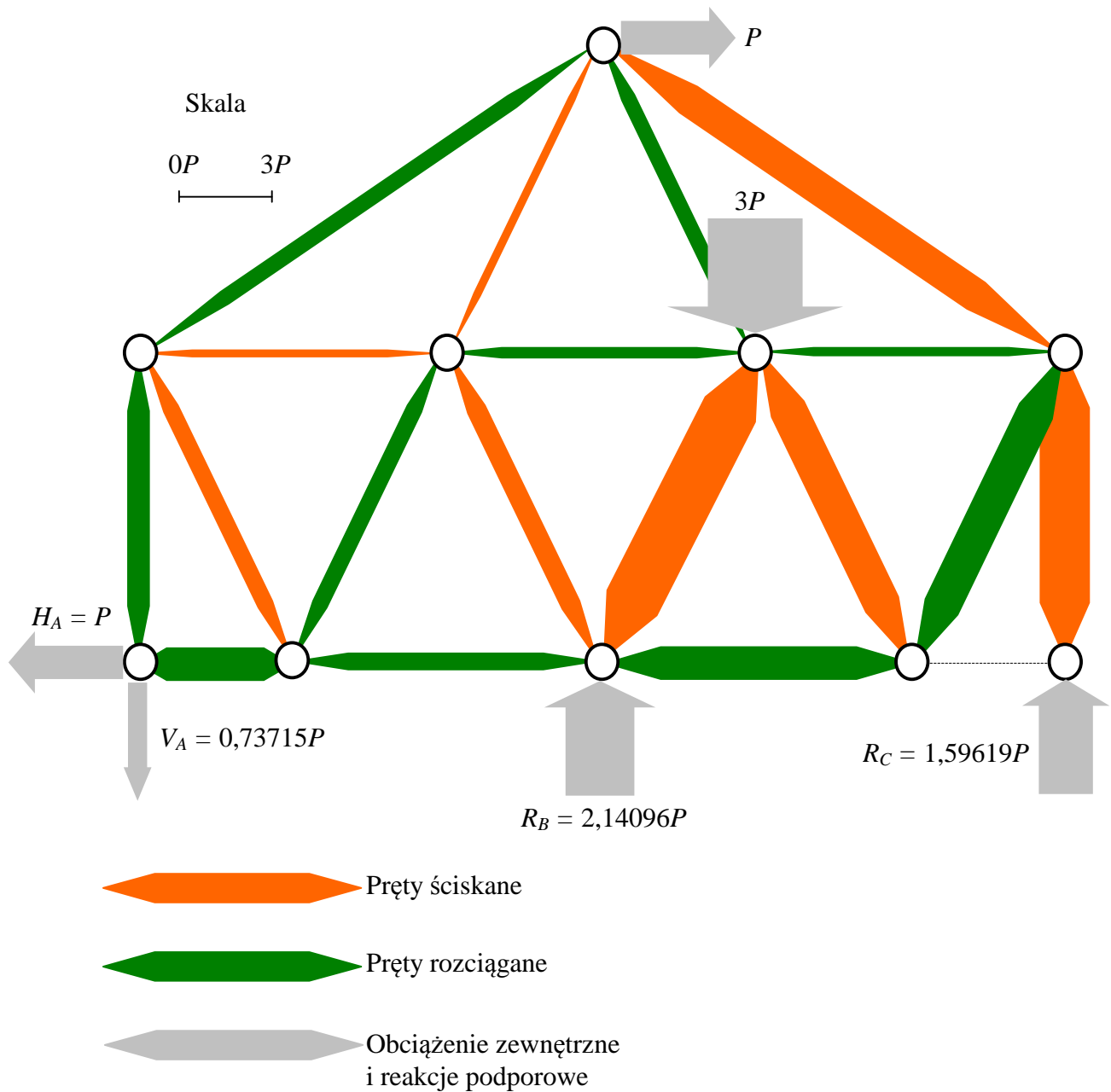
Po rozwiązaniu układu równań metody sił możemy wyznaczyć siły w prętach

$$N^{(i)} = N_1^{(i)} \cdot X_1 + N_2^{(i)} \cdot X_2 + N_3^{(i)} \cdot X_3 + N_0^{(i)}$$

Wartości sił w prętach kratownicy statycznie niewyznaczalnej obliczamy w ostatniej kolumnie tabeli.

i	$N_1^{(i)} \cdot X_1 +$		$N_2^{(i)} \cdot X_2 +$		$N_3^{(i)} \cdot X_3 +$		$N_0^{(i)} =$	$N^{(i)}[P]$
1.	0	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	$\frac{1}{2}$	-2,14096+	$-\frac{1}{3} =$	0,73715
2.	1	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	0	-2,14096+	0 =	0,50067
3.	$-\frac{4}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	$\frac{1}{4}$	-2,14096+	$-\frac{1}{6} =$	-0,18687
4.	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	-2,14096+	$\frac{\sqrt{5}}{6} =$	-0,51365
5.	0	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	0	-2,14096+	1 =	1,00000
6.	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	-2,14096+	$-\frac{\sqrt{5}}{6} =$	0,51365
7.	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	$-\frac{1}{2}$	-2,14096+	$\frac{4}{3} =$	0,54058
8.	$-2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	0	-2,14096+	$\frac{\sqrt{5}}{2} =$	-0,11125
9.	$-\frac{2}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	$-\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	$\frac{3}{4}$	-2,14096+	$-\frac{3}{2} =$	0,37206
10.	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	-2,14096+	$\frac{2\sqrt{5}}{3} =$	-0,62490
11.	0	-0,50067+	1	$\cdot (-0,98682)+$	0	-2,14096+	0 =	-0,98082
12.	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	$-2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	0	-2,14096+	$-\frac{\sqrt{5}}{2} =$	0,40903
13.	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	-0,50067+	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	-2,14096+	$-\frac{2\sqrt{5}}{3} =$	-1,76876
14.	0	-0,50067+	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	$-\frac{1}{2}$	-2,14096+	$\frac{8}{3} =$	1,05213
15.	0	-0,50067+	$-\frac{4}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	$\frac{1}{4}$	-2,14096+	$-\frac{4}{3} =$	0,29003
16.	0	-0,50067+	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	-2,14096+	$-\frac{4\sqrt{5}}{3} =$	-1,17631
17.	0	-0,50067+	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$	$\cdot (-0,98682)+$	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$	-2,14096+	$\frac{4\sqrt{5}}{3} =$	1,17631
18.	0	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	0	-2,14096+	0 =	0,00000
19.	0	-0,50067+	0	$\cdot (-0,98682)+$	$\frac{1}{2}$	-2,14096+	$-\frac{8}{3} =$	-1,59619

Otrzymane wyniki przedstawia poniższy rysunek, na którym grubości „prętów” są proporcjonalne do wyznaczonych wartości sił (w przyjętej skali).



Ze względu na symetryczną budowę rozpatrywanej kratownicy powyższe zadanie można rozwiązać stosując grupowe nadliczbowe. Układ trzech równań z trzema niewiadomymi rozprzęgą się wtedy na układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi oraz jedno równanie z jedną niewiadomą.