# Wprowadzenie

W projektowaniu belek nieodzowne jest sporządzenie wykresów sił przekrojowych. Wykorzystywane są one do wyznaczenia wymiarów przekrojów poprzecznych prętów (stosując warunek wytrzymałości). W układach statycznie niewyznaczalnych nie dysponujemy wystarczającą liczbą równań równowagi do wyznaczenia sił przekrojowych, a w przypadku układów zewnętrznie statycznie niewyznaczalnych również reakcji podporowych. Jedną z metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych (układów o nadliczbowych więzach) jest metoda przemieszczeń. W układach rozwiązywanych metodą przemieszczeń niewiadomymi są uogólnione przemieszczenia węzłów, a równania, z których są one wyznaczane, są równaniami równowagi. Metoda przemieszczeń jest szczególnie efektywna wówczas, gdy ilość niewiadomych geometrycznych (obrotów i przesunięć węzłów) nie przekracza stopnia statycznej niewyznaczalności. Sposób rozwiązywania układu statycznie niewyznaczalnego metodą przemieszczeń jest następujący:

- Określenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu $n_g$.

W przypadku belki ciągłej, której każde przęsło ma stałą sztywność zginania, korzystamy ze wzoru

$$n_g = w$$

gdzie:

$w$ - liczba węzłów (łączących dwa pręty), które mogą doznać obrotu.

Taką belkę rozwiązujemy jak układ o węzłach nieprzesuwnych.

W przypadku belki ciągłej, w której przęsłach występuje zmiana sztywności zginania, korzystamy ze wzoru

$$n_g = w + p$$

gdzie:

$w$ - liczba węzłów (łączących dwa pręty), które mogą doznać obrotu,

$p$ - liczba węzłów, które mogą doznać przesuwu.

W takim układzie belkowym występują zarówno węzły przesuwne jak i nieprzesuwne.

- Utworzenie układu podstawowego.

W rozwiązywanym układzie wprowadzamy $n_g$ nadliczbowych więzów, tworząc w ten sposób układ podstawowy geometrycznie wyznaczalny. W układzie geometrycznie wyznaczalnym obroty i przesuwy węzłów są równe zeru.

- Obciążenie układu podstawowego.

Układ podstawowy będzie równoważny rzeczywistemu układowi, jeżeli poza obciążeniem zewnętrznym działającym na układ, w miejscach wprowadzonych nadliczbowych więzów uwzględnimy występujące tam obroty i przesuwy $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_i, ...\Delta_{n_g-1}, \Delta_{n_g}$.

- Wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (reakcje nadliczbowych węzłów) i wyrazów wolnych układu równań metody przemieszczeń.

Układ podstawowy będzie pod względem statycznym równoważny rozpatrywanemu układowi geometrycznie niewyznaczalnemu, jeżeli pod wpływem obciążenia zewnętrznego oraz niewiadomych nadliczbowych $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_i, ...\Delta_{n_g-1}, \Delta_{n_g}$ siły uogólnione w układzie podstawowym w miejscach wprowadzonych $n_g$ więzów będą równe zeru. Przyjmijmy założenie, że rozpatrywana konstrukcja wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego. Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujący układ $n_g$ równań z $n_g$ niewiadomymi:

$$r_{11}\cdot\varphi_1 + r_{12}\cdot\varphi_2 + ... + r_{1i}\cdot\varphi_i + ... + r_{1n_g-1}\cdot\Delta_{n_g-1} + r_{1n_g}\cdot\Delta_{n_g} + r_{10} = 0$$
$$r_{21}\cdot\varphi_1 + r_{22}\cdot\varphi_2 + ... + r_{2i}\cdot\varphi_i + ... + r_{2n_g-1}\cdot\Delta_{n_g-1} + r_{2n_g}\cdot\Delta_{n_g} + r_{20} = 0$$
.......................................................................................................................
$$r_{i1}\cdot\varphi_1 + r_{i2}\cdot\varphi_2 + ... + r_{ii}\cdot\varphi_i + ... + r_{in_g-1}\cdot\Delta_{n_g-1} + r_{in_g}\cdot\Delta_{n_g} + r_{i0} = 0$$
.......................................................................................................................
$$r_{n_g-11}\cdot\varphi_1 + r_{n_g-12}\cdot\varphi_2 + ... + r_{n_g-1i}\cdot\varphi_i + ... + r_{n_g-1n_g-1}\cdot\Delta_{n_g-1} + r_{n_g-1n_g}\cdot\Delta_{n_g} + r_{n_g-10} = 0$$
$$r_{n_g1}\cdot\varphi_1 + r_{n_g2}\cdot\varphi_2 + ... + r_{n_gi}\cdot\varphi_i + ... + r_{n_gn_g-1}\cdot\Delta_{n_g-1} + r_{n_gn_g}\cdot\Delta_{n_g} + r_{n_g0} = 0$$

gdzie:

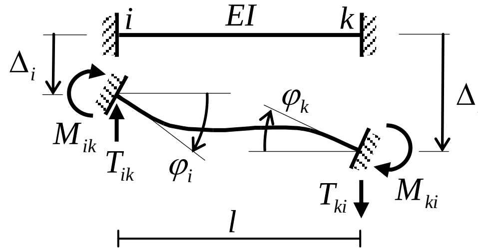
$r_{jk}$ - reakcja uogólniona odpowiadająca nadliczbowej $\varphi_j$ (lub $\Delta_j$) wywołana działaniem nadliczbowej $\varphi_k = 1$ (lub $\Delta_k = 1$)

$r_{j0}$ - reakcja uogólniona odpowiadająca nadliczbowej $\varphi_j$ (lub $\Delta_j$) wywołana działaniem obciążenia zewnętrznego.

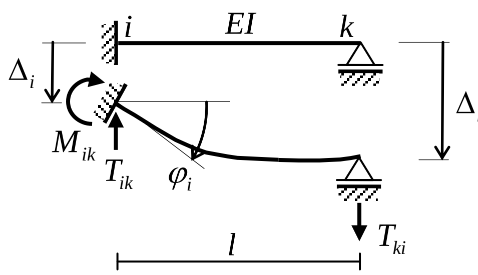
Macierz współczynników przy niewiadomych $r_{jk}$ jest symetryczna ($r_{jk} = r_{kj}$).

Wyznaczając współczynniki przy niewiadomych $r_{jk}$ oraz wyrazy wolne $r_{j0}$ powyższego układu równań korzystamy ze wzorów transformacyjnych oraz ze wzorów na momenty i siły tnące wyjściowe.

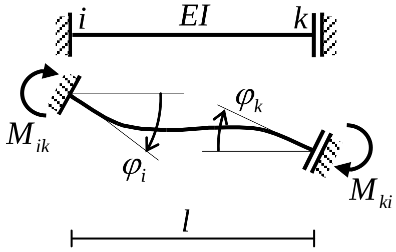
Wzory transformacyjne




$$M_{ik} = \frac{2EI}{l}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi\right)$$
$$M_{ki} = \frac{2EI}{l}\left(\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi\right)$$
$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_i + \varphi_k - 2\psi\right)$$
gdzie $\psi = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l}$



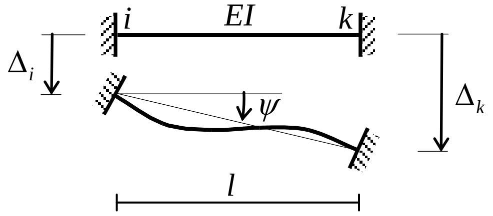

$$M_{ik} = \frac{3EI}{l}\left(\varphi_i - \psi\right)$$
$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{3EI}{l^2}\left(\varphi_i - \psi\right)$$
gdzie $\psi = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l}$




$$M_{ik} = \frac{EI}{l}\left(\varphi_i - \varphi_k\right)$$

$$M_{ki} = \frac{EI}{l}\left(-\varphi_i + \varphi_k\right)$$

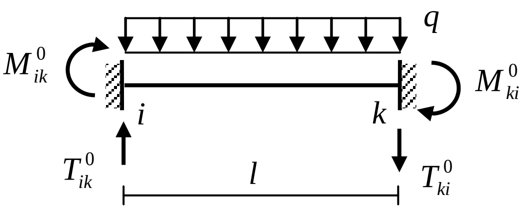
W powyższych wzorach $\psi$ oznacza kąt obrotu cięciwy odkształconego pręta.




$$\psi = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l}$$

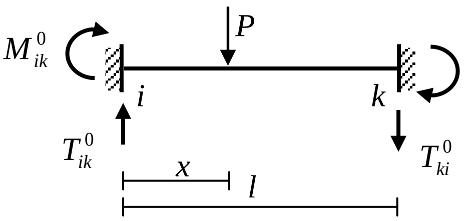
Kąty obrotu węzłów i kąty obrotu cięciw są dodatnie, jeżeli mają zwrot zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Zwroty dodatnich momentów i sił tnących w przekrojach przywęzłowych pręta są zgodne z podanymi na powyższych rysunkach.

Momenty i siły tnące wyjściowe




$$M_{ik}^0 = -\frac{1}{12}ql^2, \quad M_{ki}^0 = \frac{1}{12}ql^2$$

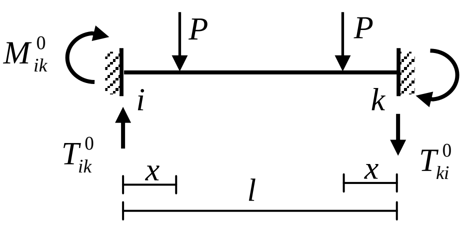
$$T_{ik}^0 = \frac{1}{2}ql, \qquad T_{ki}^0 = -\frac{1}{2}ql$$




$$M_{ik}^0 = -Pl\xi\xi'^2, \quad M_{ki}^0 = Pl\xi^2\xi'$$

$$T_{ik}^0 = P\xi'^2\left(3-2\xi'\right), \; T_{ki}^0 = -P\xi^2\left(3-2\xi\right)$$

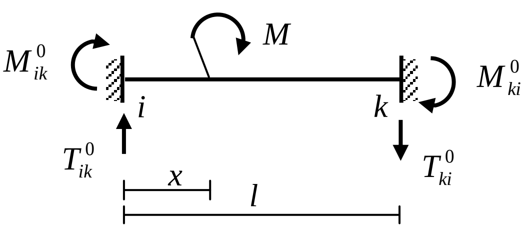
gdzie $\xi = \frac{x}{l}$, $\xi' = \frac{l-x}{l}$




$$M_{ik}^0 = -Pl\xi\xi', \quad M_{ki}^0 = Pl\xi\xi'$$

$$T_{ik}^0 = P, \qquad T_{ki}^0 = -P$$

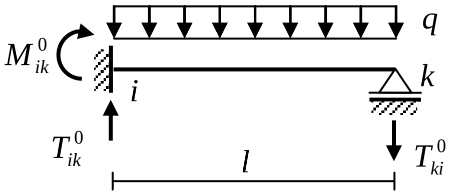
gdzie $\xi = \frac{x}{l}$, $\xi' = \frac{l-x}{l}$




$$M_{ik}^0 = M\xi'\left(2-3\xi'\right), \quad M_{ki}^0 = M\xi\left(2-3\xi\right)$$

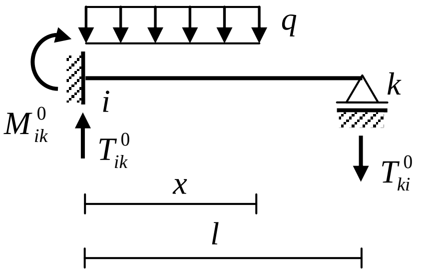
$$T_{ik}^0 = T_{ki}^0 = -\frac{6M}{l}\xi\xi'$$

gdzie $\xi = \frac{x}{l}$, $\xi' = \frac{l-x}{l}$




$$M_{ik} = -\frac{1}{8} q l^2$$

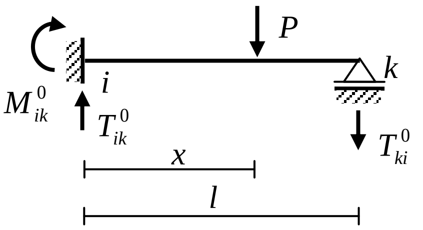
$$T_{ik} = \frac{5}{8} ql, \quad T_{ki} = -\frac{3}{8} ql$$




$$M_{ik}^0 = -\frac{qx^2}{8}(2-\xi)^2$$

$$T_{ik}^0 = \frac{qx}{8}\left(8 - 4\xi^2 + \xi^3\right), \quad T_{ki}^0 = -\frac{qx}{8}\xi^2(4-\xi)$$

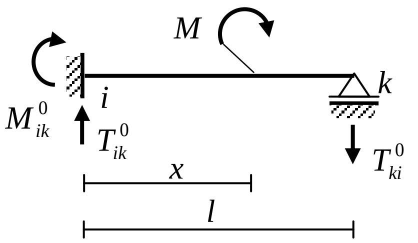
gdzie $\xi = \dfrac{x}{l}$




$$M_{ik}^0 = -\frac{1}{2} Pl\xi\xi^{'}(2-\xi)$$

$$T_{ik}^0 = \frac{P}{2}\xi^{'}\left(3 - \xi^{'2}\right), \quad T_{ki}^0 = -\frac{P}{2}\xi^2(3-\xi)$$

gdzie $\xi = \dfrac{x}{l}, \quad \xi^{'} = \dfrac{l-x}{l}$



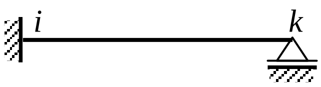

$$M_{ik}^0 = \frac{M}{2}\left(1 - 3\xi^{'2}\right)$$

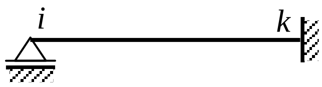
$$T_{ik}^0 = T_{ki}^0 = -\frac{3M}{2l}\xi(2-\xi)$$

gdzie $\xi = \dfrac{x}{l}, \quad \xi^{'} = \dfrac{l-x}{l}$

Przedstawione powyżej wzory na momenty i siły tnące wyjściowe zostaną wykorzystane do rozwiązania zadań w niniejszym rozdziale. Dla innych przypadków obciążeń należy zastosować wzory zamieszczone w podręcznikach omawiających metodę przemieszczeń.

Uwaga




Wzory transformacyjne dla powyższych belek są identyczne z uwzględnieniem zmiany przekroju przywęzłowego *ik* na *ki* oraz kąta $\varphi_i$ na $\varphi_k$. Korzystając natomiast ze wzorów na momenty i siły tnące wyjściowe należy pamiętać o różnicach w znakach dla obu schematów.