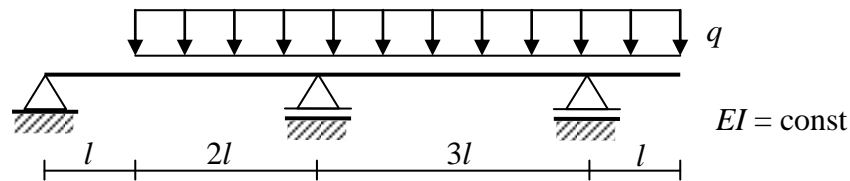


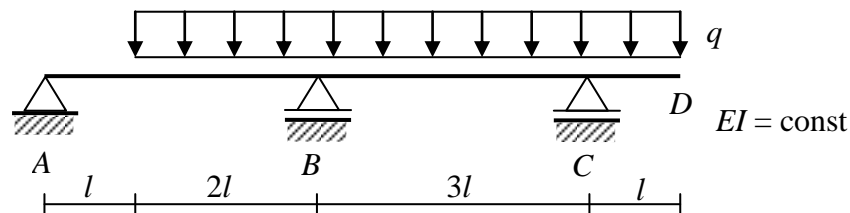
## Przykład 7.1. Belka jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalna

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej belki korzystając z metody przemieszczeń



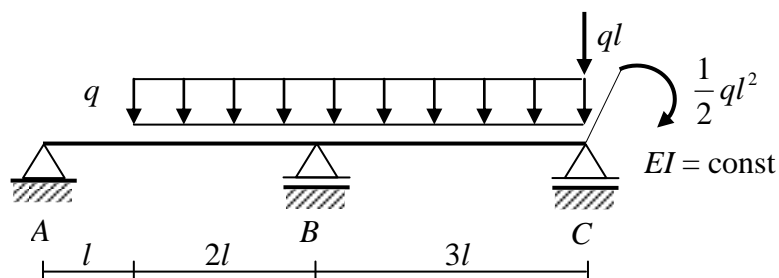
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór oraz prawego końca belki.



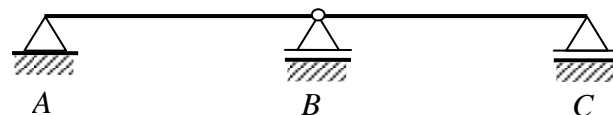
Rys. 2

Przewieszony wspornik  $CD$  jest statycznie wyznaczalną częścią układu. W celu zmniejszenia liczby niewiadomych geometrycznych usuniemy go, a jego działanie zastąpimy siłami przekrojowymi występującymi w przekroju przywęzłowym  $CD$ . W przeciwnym razie musielibyśmy rozwiązywać układ dwukrotnie (kąty obrotu węzła  $B$  i  $C$ ) lub trzykrotnie (kąty obrotu węzła  $B$  i  $C$  oraz przesuw prawego końca belki  $D$ ) geometrycznie niewyznaczalny.



Rys. 3

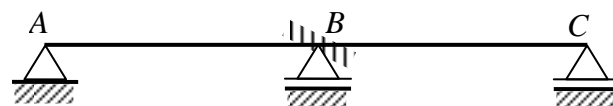
W powyższym układzie niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła  $B$ . Należy również sprawdzić, czy rozpatrywana belka jest układem przesuwным. W tym celu tworzymy z belki łańcuch kinematyczny, wprowadzając w miejscu węzła  $B$  przegub.



Rys. 4

Powyższy łańcuch kinematyczny jest układem geometrycznie niezmiennym, a zatem belka, przedstawiona na rysunku 3 jest układem nieprzesuwным. W układzie nieprzesuwным jako niewiadome nie występują kąty obrotu cięciw odkształconych prętów.

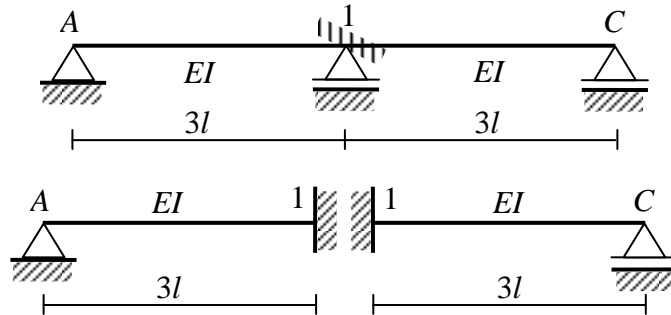
Następnie utworzymy układ geometrycznie wyznaczalny, w którym kąt obrotu węzła  $B$  jest zerowy dzięki wprowadzeniu fikcyjnego więzu blokującego możliwość obrotu węzła  $B$ .



Rys. 5

Jedyną niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła  $B$ . Przyjmijmy, że  $\varphi_B = \varphi_1$ .  
 Konsekwentnie w miejscu punktu  $B$  wprowadzimy oznaczenie 1.

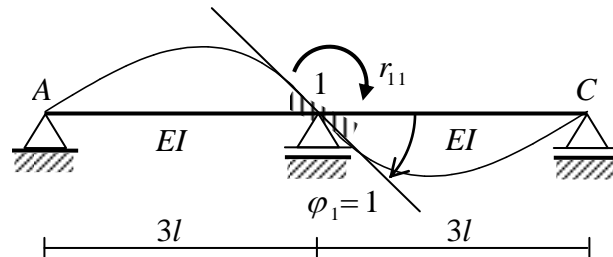
Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy prętów w poszczególnych przęsłach belki.



Rys. 6

Stan  $\varphi_1 = 1$

Obracamy węzeł 1 o kąt  $\varphi_1 = 1$ , a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja  $r_{11}$ .

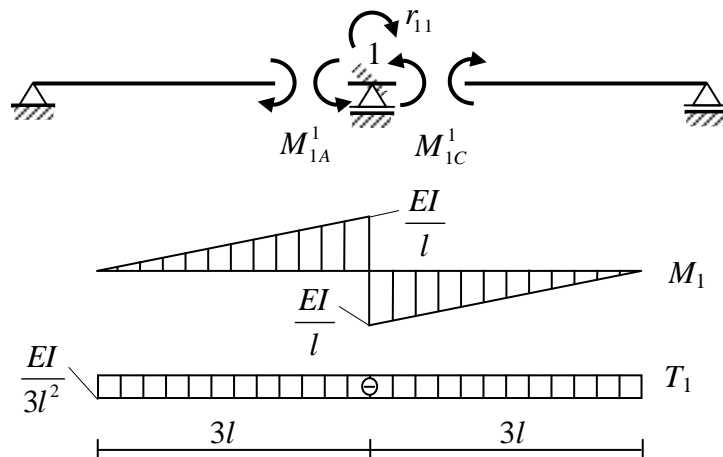


Rys. 7

W przekrojach przywęzłowych 1A i 1C powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych. Następnie sporządzamy wykres  $M_1$  oraz  $T_1$  oraz wyznaczamy reakcję  $r_{11}$ .

$$M_{1A}^1 = \frac{3EI}{3l}(1-0) = \frac{EI}{l}, \quad T_{1A}^1 = T_{A1}^1 = -\frac{3EI}{(3l)^2}(1-0) = -\frac{EI}{3l^2}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{3EI}{3l}(1-0) = \frac{EI}{l}, \quad T_{1C}^1 = T_{C1}^1 = -\frac{3EI}{(3l)^2}(1-0) = -\frac{EI}{3l^2}$$



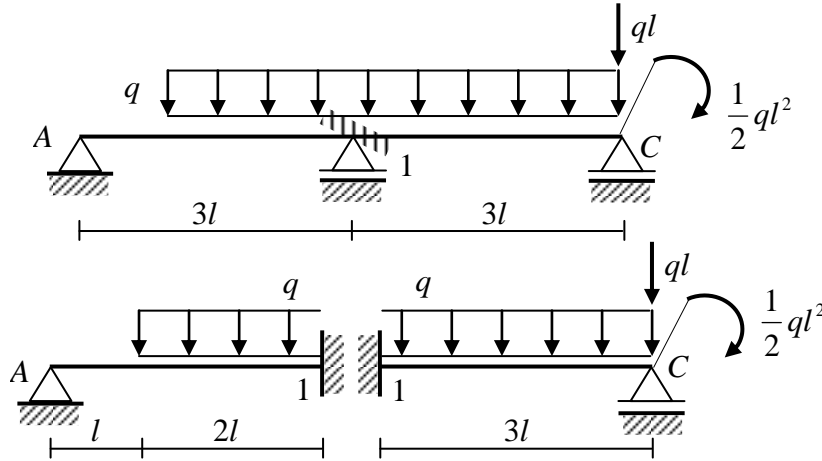
Rys. 8

Reakcję  $r_{11}$  w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^1 + M_{1C}^1 - r_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{11} = \frac{2EI}{l}$$

Stan zerowy

Układ geometrycznie wyznaczalny obciążamy obciążeniem zewnętrznym.



Rys. 9

Korzystając ze wzorów na momenty i siły tnące wyjściowe otrzymujemy:

$$M_{1A}^0 = \frac{q(2l)^2}{8} \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{9} ql^2$$

$$T_{A1}^0 = \frac{q \cdot 2l}{8} \left( \frac{2}{3} \right) \left( 4 - \frac{2}{3} \right) = \frac{10}{27} ql$$

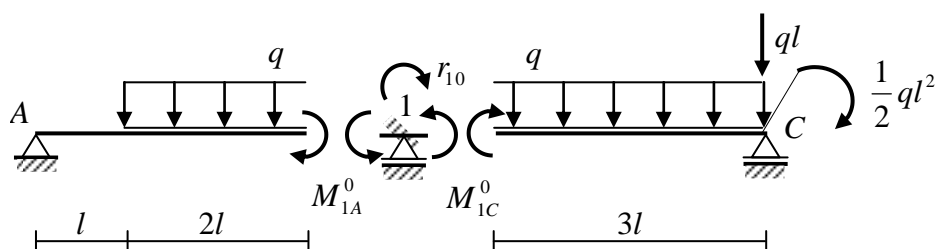
$$T_{1A}^0 = -\frac{q \cdot 2l}{8} \left( 8 - 4 \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \right)^3 \right) = -\frac{44}{27} ql$$

$$M_{1C}^0 = -\frac{1}{8} q(3l)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ql^2 (1 - 3 \cdot 0) = -\frac{7}{8} ql^2$$

$$T_{1C}^0 = \frac{5}{8} q \cdot 3l - \frac{3}{2 \cdot 3l} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot 1 \cdot (2 - 1) = \frac{13}{8} ql$$

$$T_{C1}^0 = -\frac{3}{8} q \cdot 3l - \frac{3}{2 \cdot 3l} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot 1 \cdot (2 - 1) = -\frac{11}{8} ql$$

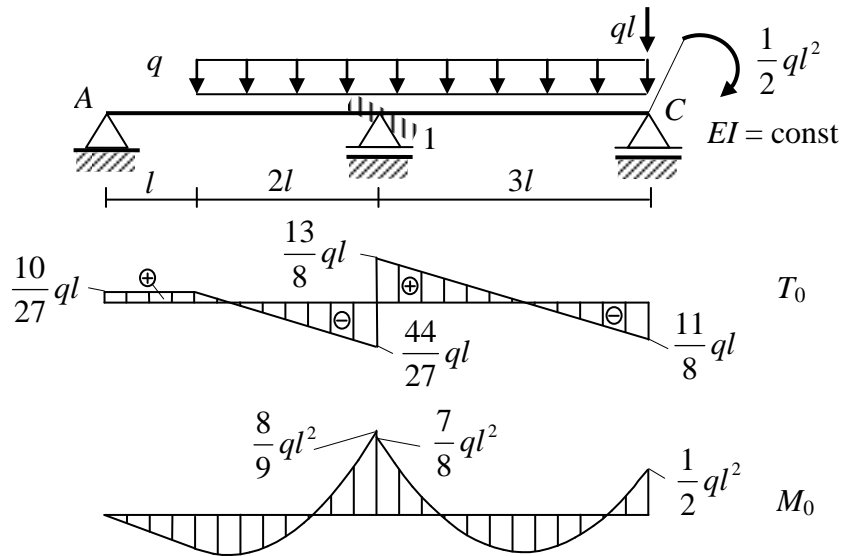
Następnie wyznaczamy reakcję  $r_{10}$  oraz sporządzamy wykres  $M_0$  oraz  $T_0$ .



Rys. 10

Reakcję  $r_{10}$  w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^0 + M_{1C}^0 - r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = \frac{1}{72} ql^2$$



Rys. 11

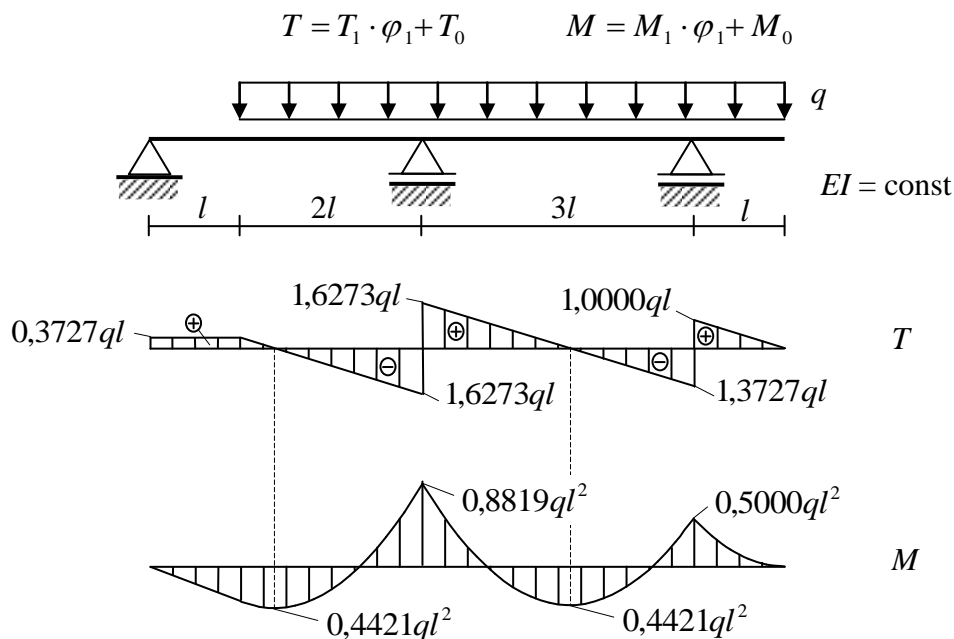
Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujące równanie:

$$r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{10} = 0$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości reakcji fikcyjnej podpory dostajemy

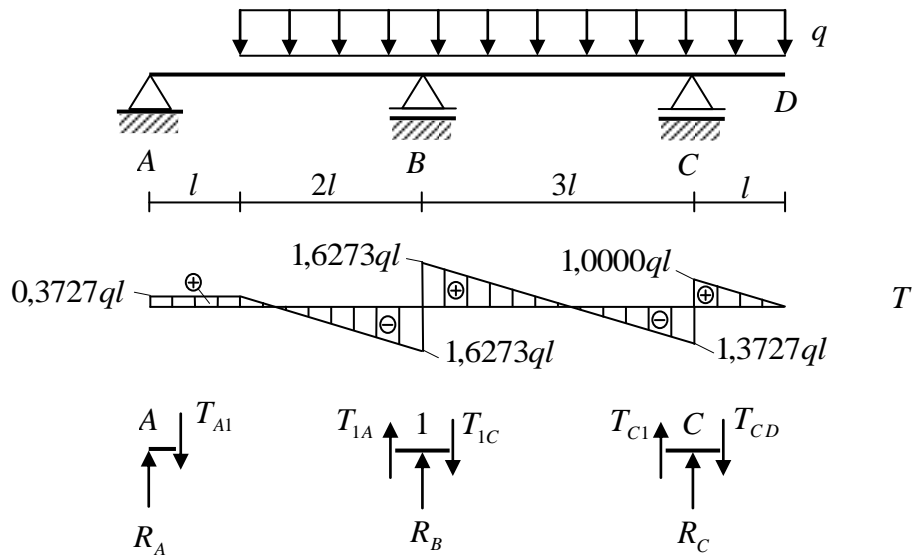
$$\frac{2EI}{l} \cdot \varphi_1 + \frac{1}{72} ql^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{1}{144} \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

Wykresy sił przekrojowych w rzeczywistym układzie geometrycznie niewyznaczalnym sporządzamy korzystając z wykresów wykonanych w poszczególnych stanach.



Rys. 12

Korzystając z wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczmy wartości reakcji podporowych.



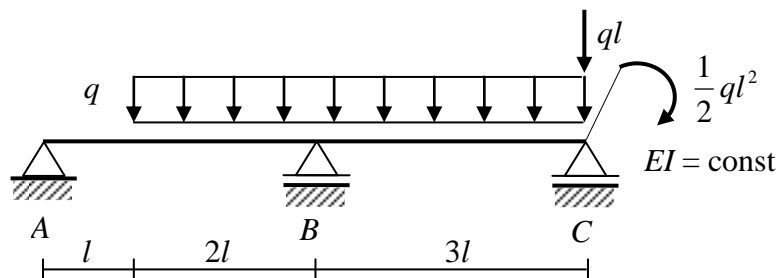
Rys. 13

$$\sum_i P_{iy}^A = 0: \quad R_A - T_{A1} = 0 \quad \Rightarrow R_A = T_{A1} = 0,3727ql$$

$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad R_B + T_{1A} - T_{1C} = 0 \quad \Rightarrow R_B = T_{1C} - T_{1A} = 3,2546ql$$

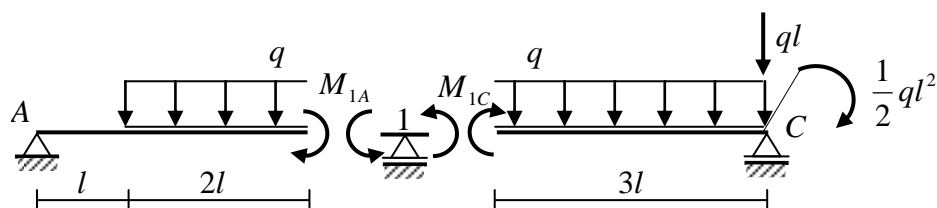
$$\sum_i P_{iy}^C = 0: \quad R_C + T_{C1} - T_{CD} = 0 \quad \Rightarrow R_C = T_{CD} - T_{C1} = 2,3727ql$$

Równanie metody przemieszczeń dla rozważanej belki możemy otrzymać podstawiając do równania równowagi, stosownego do niewiadomej geometrycznej, siły przekrojowe występujące w przekrojach przywęzłowych. Pomiemy tutaj ustalenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu oraz uzasadnienie dla usunięcia przewieszonoego wspornika z prawej strony belki.



Rys. 14

Jedyną niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła B. Przyjmijmy, że  $\varphi_B = \varphi_1$ . W celu wyznaczenia tej niewiadomej wykorzystamy równanie równowagi stosowne do poszukiwanej niewiadomej geometrycznej. W przypadku, gdy niewiadomą jest kąt obrotu węzła 1 zapisujemy równanie sumy momentów działających na węzeł 1 w przekrojach przywęzłowych.



Rys. 15

Wyznaczamy momenty w przekrojach przywęzłowych korzystając ze wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe.

$$M_{1A} = \frac{3EI}{3l}(\varphi_1 - 0) + M_{1A}^0 = \frac{EI}{l}\varphi_1 + \frac{q(2l)^2}{8}\left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{EI}{l}\varphi_1 + \frac{8}{9}ql^2$$

$$M_{1C} = \frac{3EI}{3l}(\varphi_1 - 0) + M_{1C}^0 = \frac{EI}{l}\varphi_1 - \frac{1}{8}q(3l)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}ql^2(1 - 3 \cdot 0^2) = \frac{EI}{l}\varphi_1 - \frac{7}{8}ql^2$$

Otrzymujemy równanie

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A} + M_{1C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{l}\varphi_1 + \frac{8}{9}ql^2 + \frac{EI}{l}\varphi_1 - \frac{7}{8}ql^2 = 0$$

Stąd

$$2\frac{EI}{l}\varphi_1 + \frac{1}{72}ql^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{1}{144}\frac{ql^3}{EI}$$

Po podstawieniu  $\varphi_1$  wyznaczamy wartości sił przekrojowych w przekrojach przywęzłowych

$$M_{1A} = \frac{EI}{l}\varphi_1 + \frac{8}{9}ql^2 = \frac{EI}{l}\left(-\frac{1}{144}\frac{ql^3}{EI}\right) + \frac{8}{9}ql^2 = 0,8819ql^2$$

$$M_{1C} = \frac{EI}{l}\varphi_1 - \frac{7}{8}ql^2 = \frac{EI}{l}\left(-\frac{1}{144}\frac{ql^3}{EI}\right) - \frac{7}{8}ql^2 = -0,8819ql^2$$

$$T_{A1} = -\frac{3EI}{(3l)^2}\varphi_1 + \frac{q \cdot 2l}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(4 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{EI}{3l^2}\left(-\frac{1}{144}\frac{ql^3}{EI}\right) + \frac{10}{27}ql = 0,3727ql$$

$$T_{1A} = -\frac{3EI}{(3l)^2}\varphi_1 - \frac{q \cdot 2l}{8}\left(8 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) = -\frac{EI}{3l^2}\left(-\frac{1}{144}\frac{ql^3}{EI}\right) - \frac{44}{27}ql = -1,6273ql$$

$$T_{1C} = -\frac{3EI}{(3l)^2}\varphi_1 + \frac{5}{8}q \cdot 3l - \frac{3}{2 \cdot 3l} \cdot \frac{1}{2}ql^2 \cdot 1 \cdot (2 - 1) = -\frac{EI}{3l^2}\left(-\frac{1}{144}\frac{ql^3}{EI}\right) + \frac{13}{8}ql = +1,6273ql$$

$$T_{C1} = -\frac{3EI}{(3l)^2}\varphi_1 - \frac{3}{8}q \cdot 3l - \frac{3}{2 \cdot 3l} \cdot \frac{1}{2}ql^2 \cdot 1 \cdot (2 - 1) = -\frac{EI}{3l^2}\left(-\frac{1}{144}\frac{ql^3}{EI}\right) - \frac{11}{8}ql = -1,3727ql$$

Jak należało się spodziewać, otrzymane wartości sił przekrojowych są identyczne z poprzednio wyznaczonymi. Można również ograniczyć się do wyznaczenia jedynie momentów w przekrojach przywęzłowych z wykorzystaniem wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe, natomiast wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczyć z równań równowagi dla poszczególnych prętów.