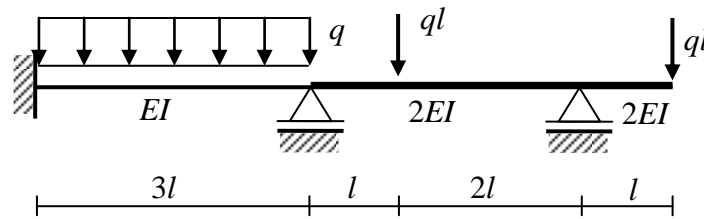


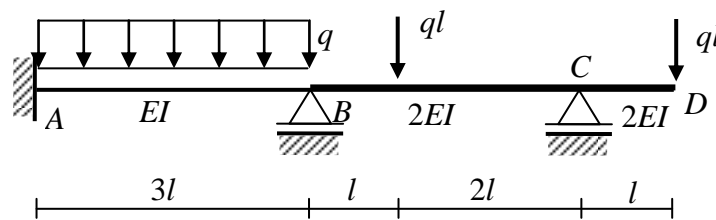
## Przykład 7.2. Belka jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalna

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej belki korzystając z metody przemieszczeń



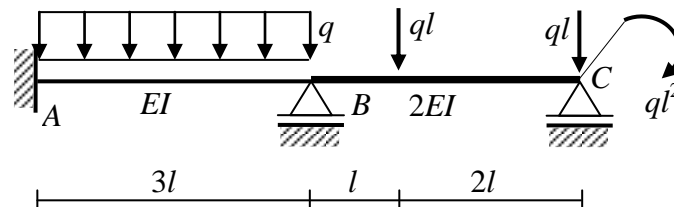
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór oraz prawego końca belki.



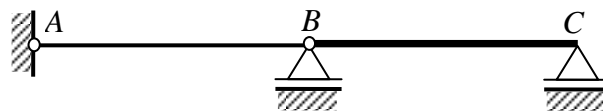
Rys. 2

Przewieszony wspornik  $CD$  jest statycznie wyznaczalną częścią układu. W celu zmniejszenia liczby niewiadomych geometrycznych usuniemy go, a jego działanie zastąpimy siłami przekrojowymi występującymi w przekroju przywęzłowym  $CD$ . W przeciwnym razie musielibyśmy rozwiązywać układ dwukrotnie (kąty obrotu węzła  $B$  i  $C$ ) lub trzykrotnie (kąty obrotu węzła  $B$  i  $C$  oraz przesuw prawego końca belki  $D$ ) geometrycznie niewyznaczalny.



Rys. 3

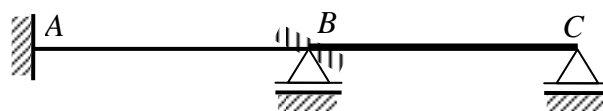
W powyższym układzie niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła  $B$ . Należy również sprawdzić, czy rozpatrywana belka jest układem przesuwным. W tym celu tworzymy z belki łańcuch kinematyczny, wprowadzając w miejscu podpory  $A$  i węzła  $B$  przeguby.



Rys. 4

Powyższy łańcuch kinematyczny jest układem geometrycznie niezmiennym, a zatem belka przedstawiona na rysunku 3 jest układem nieprzesuwным. W układzie nieprzesuwным jako niewiadome nie występują kąty obrotu cięciw odkształconych prętów.

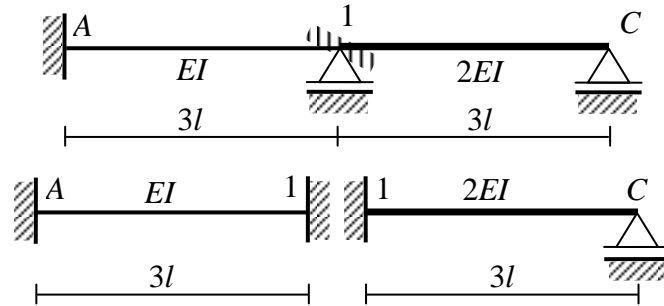
Następnie utworzymy układ geometrycznie wyznaczalny, w którym kąt obrotu węzła  $B$  jest zerowy dzięki wprowadzeniu fikcyjnego więzu blokującego możliwość obrotu węzła  $B$ .



Rys. 5

Jedyną niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła  $B$ . Przyjmijmy, że  $\varphi_B = \varphi_1$ . Konsekwentnie w miejscu punktu  $B$  wprowadzimy oznaczenie 1.

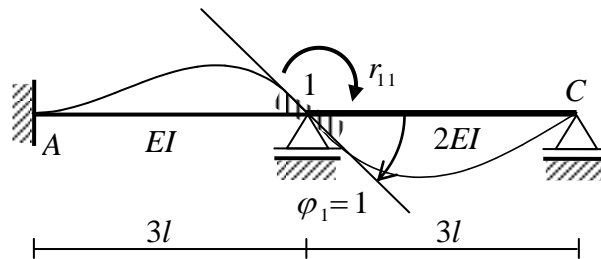
Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy prętów w poszczególnych przęsłach belki.



Rys. 6

Stan  $\varphi_1=1$

Obracamy węzeł 1 o kąt  $\varphi_1=1$ , a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja  $r_{11}$ .

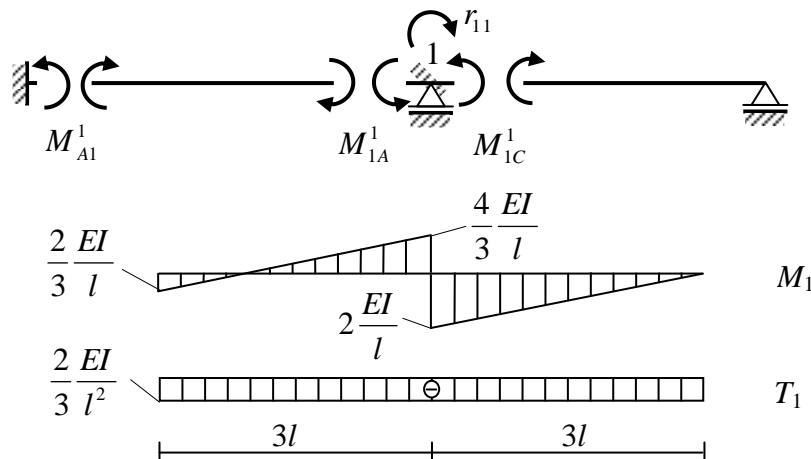


Rys. 7

W przekrojach przywęzłowych  $A1$ ,  $1A$  i  $1C$  powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych. Następnie sporządzamy wykres  $M_1$  oraz  $T_1$  oraz wyznaczamy reakcję  $r_{11}$ .

$$M_{A1}^1 = \frac{2EI}{3l}(1) = \frac{2EI}{3l}, \quad M_{1A}^1 = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot 1) = \frac{4EI}{3l}, \quad T_{1A}^1 = T_{A1}^1 = -\frac{6EI}{(3l)^2}(1) = -\frac{2EI}{3l^2}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{3 \cdot 2EI}{3l}(1) = \frac{2EI}{l}, \quad T_{1C}^1 = T_{C1}^1 = -\frac{3 \cdot 2EI}{(3l)^2}(1) = -\frac{2EI}{3l^2}$$



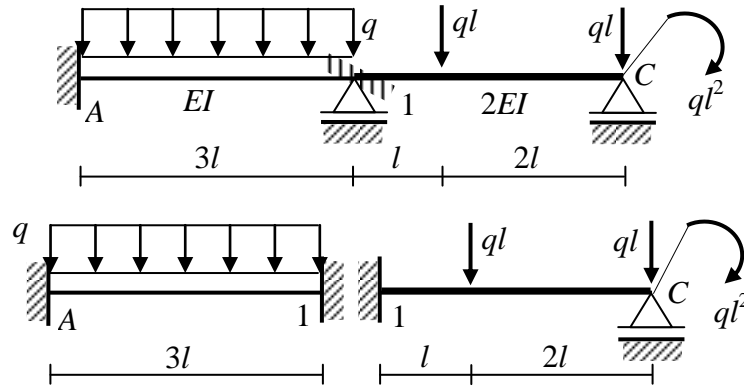
Rys. 8

Reakcję  $r_{11}$  w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^1 + M_{1C}^1 - r_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{11} = \frac{10 EI}{3 l}$$

Stan zerowy

Układ geometrycznie wyznaczalny obciążamy obciążeniem zewnętrznym.



Rys. 9

Korzystając ze wzorów na momenty i siły tnące wyjściowe otrzymujemy:

$$M_{A1}^0 = -\frac{1}{12} \cdot q \cdot (3l)^2 = -\frac{3}{4} ql^2, \quad M_{1A}^0 = \frac{1}{12} \cdot q \cdot (3l)^2 = \frac{3}{4} ql^2$$

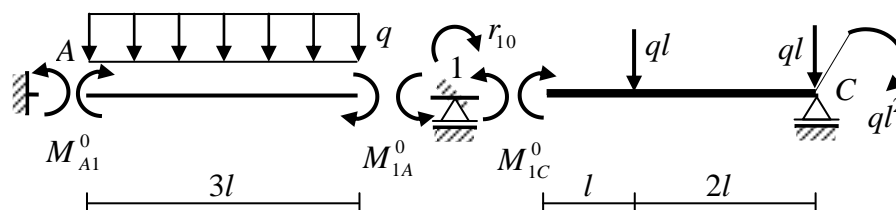
$$T_{A1}^0 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3l = \frac{3}{2} ql, \quad T_{1A}^0 = -\frac{1}{2} q \cdot 3l = -\frac{3}{2} ql$$

$$M_{1C}^0 = -\frac{1}{2} \cdot ql \cdot 3l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot (1 - 3 \cdot 0) = -\frac{5}{9} ql^2 + \frac{1}{2} ql^2 = -\frac{1}{18} ql^2$$

$$T_{1C}^0 = \frac{1}{2} \cdot ql \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{ql^2}{3l} \cdot 1 \cdot (2 - 1) = \frac{23}{27} ql - \frac{1}{2} ql = \frac{19}{54} ql$$

$$T_{C1}^0 = -\frac{1}{2} \cdot ql \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{ql^2}{3l} \cdot 1 \cdot (2 - 1) = -\frac{4}{27} ql - \frac{1}{2} ql = -\frac{35}{54} ql$$

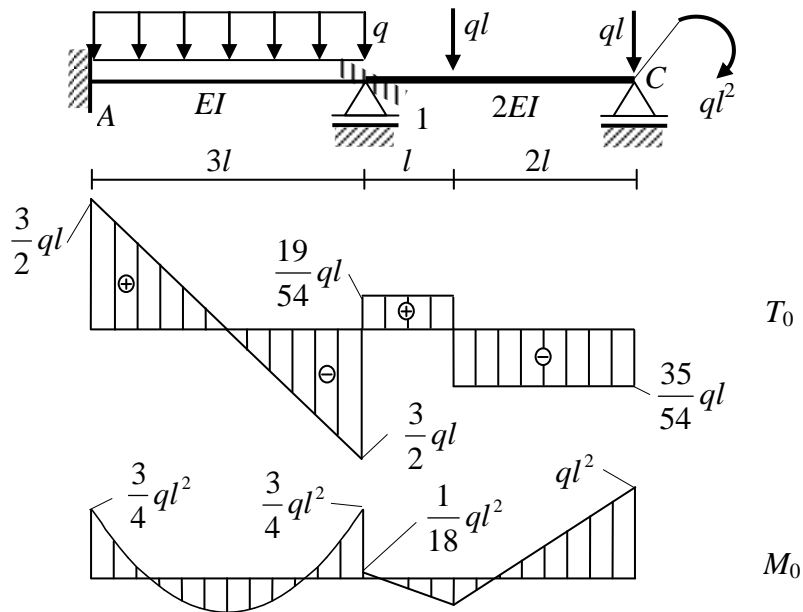
Następnie wyznaczamy reakcję  $r_{10}$  oraz sporządzamy wykres  $M_0$  oraz  $T_0$ .



Rys. 10

Reakcję  $r_{10}$  w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^0 + M_{1C}^0 - r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = \frac{25}{36} ql^2$$



Rys. 11

Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujące równanie:

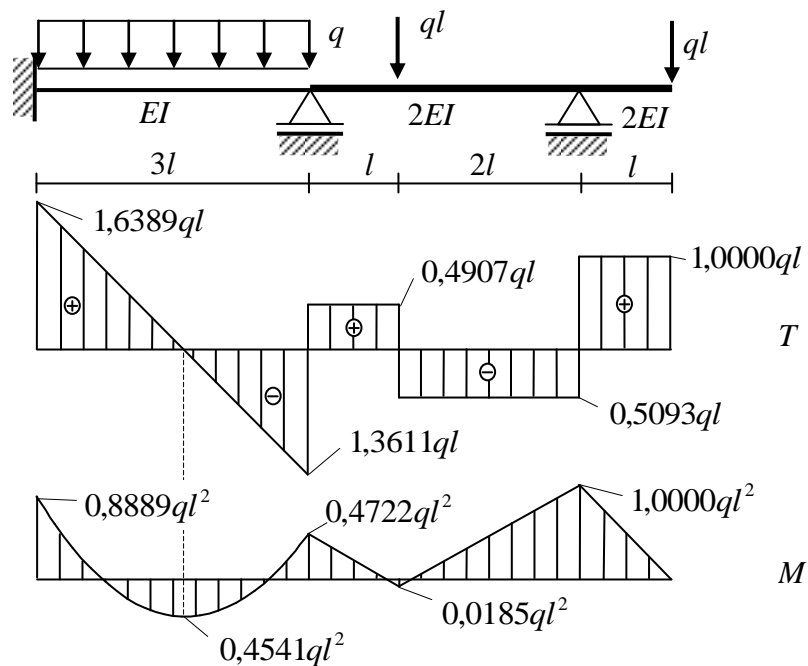
$$r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{10} = 0$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości reakcji fikcyjnej podpory dostajemy

$$\frac{10}{3} \frac{EI}{l} \cdot \varphi_1 + \frac{25}{36} ql^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{5}{24} \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

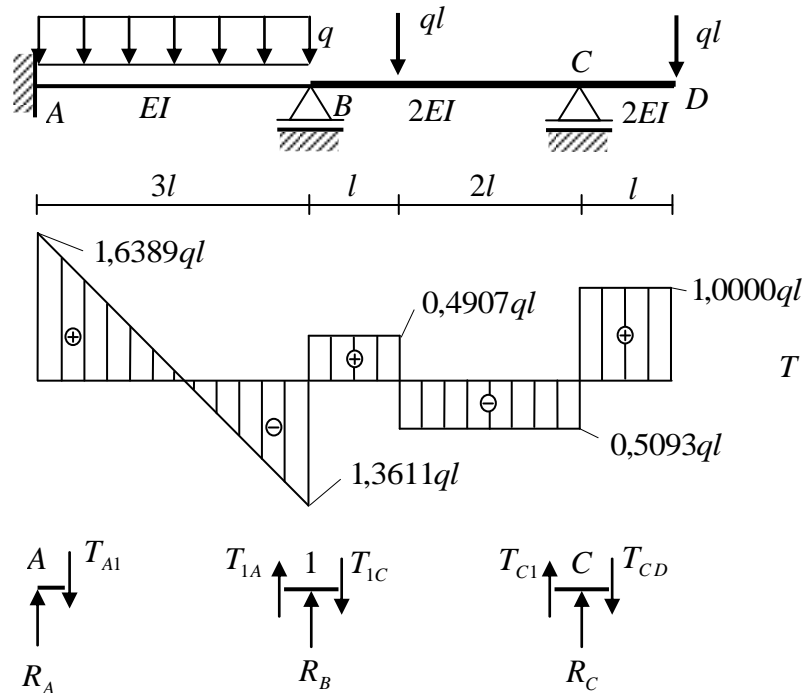
Wykresy sił przekrojowych w rzeczywistym układzie geometrycznie niewyznaczalnym sporządzamy korzystając z wykresów wykonanych w poszczególnych stanach.

$$T = T_1 \cdot \varphi_1 + T_0 \quad M = M_1 \cdot \varphi_1 + M_0$$



Rys. 12

Korzystając z wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczmy wartości reakcji podporowych.



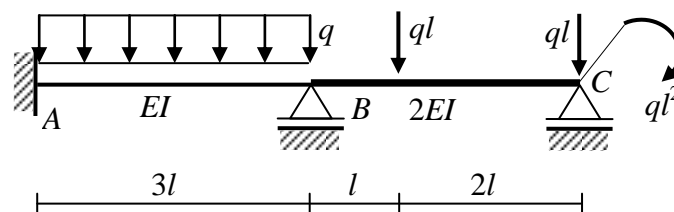
Rys. 13

$$\sum_i P_{iy}^A = 0: \quad R_A - T_{A1} = 0 \quad \Rightarrow R_A = T_{A1} = 1,6389ql$$

$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad R_B + T_{1A} - T_{1C} = 0 \quad \Rightarrow R_B = T_{1C} - T_{1A} = 1,8518ql$$

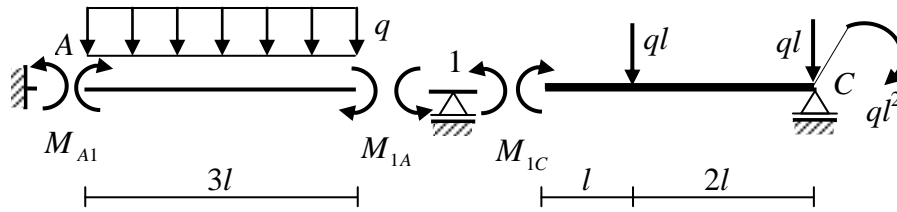
$$\sum_i P_{iy}^C = 0: \quad R_C + T_{C1} - T_{CD} = 0 \quad \Rightarrow R_C = T_{CD} - T_{C1} = 1,5093ql$$

Równanie metody przemieszczeń dla rozważanej belki możemy otrzymać podstawiając do równania równowagi, stosownego do niewiadomej geometrycznej, siły przekrojowe występujące w przekrojach przywęzłowych. Pominiemy tutaj ustalenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu oraz uzasadnienie dla usunięcia przewieszzonego wspornika z prawej strony belki.



Rys. 14

Jedyną niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła B. Przyjmijmy, że  $\varphi_B = \varphi_1$ . W celu wyznaczenia tej niewiadomej wykorzystamy równanie równowagi stosowne do poszukiwanej niewiadomej geometrycznej. W przypadku, gdy niewiadomą jest kąt obrotu węzła 1 zapisujemy równanie sumy momentów działających na węzeł 1 w przekrojach przywęzłowych.



Rys. 15

Wyznaczamy momenty w przekrojach przywęzłowych korzystając ze wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe.

$$M_{1A} = \frac{2EI}{3l} (2 \cdot \varphi_1) + M_{1A}^0 = \frac{EI}{l} \varphi_1 + \frac{1}{12} \cdot q \cdot (3l)^2 = \frac{4}{3} \frac{EI}{l} \varphi_1 + \frac{3}{4} ql^2$$

$$M_{1C} = \frac{3 \cdot 2EI}{3l} (\varphi_1) + M_{1C}^0 = \frac{2EI}{l} \varphi_1 - \frac{1}{2} ql \cdot 3l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot (1 - 3 \cdot 0^2) =$$

$$= \frac{2EI}{l} \varphi_1 - \frac{1}{18} ql^2$$

Otrzymujemy równanie

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A} + M_{1C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} \frac{EI}{l} \varphi_1 + \frac{3}{4} ql^2 + \frac{2EI}{l} \varphi_1 - \frac{1}{18} ql^2 = 0$$

Stąd

$$\frac{10}{3} \frac{EI}{l} \varphi_1 + \frac{25}{36} ql^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{5}{24} \frac{ql^3}{EI}$$

Wyznaczamy siły przekrojowe w przekrojach przywęzłowych

$$M_{A1} = \frac{2EI}{3l} \varphi_1 + M_{1A}^0 = \frac{2}{3} \frac{EI}{l} \left( -\frac{5}{24} \frac{ql^3}{EI} \right) - \frac{1}{12} \cdot q \cdot (3l)^2 = -\frac{8}{9} ql^2 = -0,8889ql^2$$

$$M_{1A} = \frac{4}{3} \frac{EI}{l} \varphi_1 + M_{1A}^0 = \frac{4}{3} \frac{EI}{l} \left( -\frac{5}{24} \frac{ql^3}{EI} \right) + \frac{3}{4} ql^2 = \frac{17}{36} ql^2 = 0,4722ql^2$$

$$M_{1C} = \frac{2EI}{l} \varphi_1 - \frac{1}{18} ql^2 = \frac{2EI}{l} \left( -\frac{5}{24} \frac{ql^3}{EI} \right) - \frac{1}{18} ql^2 = -\frac{17}{36} ql^2 = -0,4722ql^2$$

$$T_{A1} = -\frac{6EI}{(3l)^2} \varphi_1 + \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3l = -\frac{2}{3} \frac{EI}{l^2} \left( -\frac{5}{24} \frac{ql^3}{EI} \right) + \frac{3}{2} ql = \frac{59}{36} ql = 1,6389ql$$

$$T_{1A} = -\frac{6EI}{(3l)^2} \varphi_1 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3l = -\frac{3}{3} \frac{EI}{l^2} \left( -\frac{5}{24} \frac{ql^3}{EI} \right) - \frac{3}{2} ql = -\frac{49}{36} ql = -1,3611ql$$

$$T_{1C} = -\frac{3 \cdot 2EI}{(3l)^2} \varphi_1 + \frac{1}{2} \cdot ql \cdot \frac{2}{3} \cdot \left( 3 - \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{ql^2}{3l} \cdot 1 \cdot (2 - 1) = -\frac{2}{3} \frac{EI}{l^2} \left( -\frac{5}{24} \frac{ql^3}{EI} \right) + \frac{19}{54} ql =$$

$$= \frac{53}{108} ql = 0,4907ql$$

$$\begin{aligned}
T_{c1} &= -\frac{3 \cdot 2EI}{(3l)^2} \varphi_1 - \frac{1}{2} ql \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{ql^2}{3l} \cdot 1 \cdot (2-1) = -\frac{2}{3} \frac{EI}{l^2} \left(-\frac{5}{24} \frac{ql^3}{EI}\right) - \frac{35}{54} ql = \\
&= -\frac{55}{108} ql = -0,5093ql
\end{aligned}$$

Jak należało się spodziewać, otrzymane wartości sił przekrojowych są identyczne z poprzednio wyznaczonymi. Można również ograniczyć się do wyznaczenia jedynie momentów w przekrojach przywęzłowych z wykorzystaniem wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe, natomiast wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczyć z równań równowagi dla poszczególnych prętów.