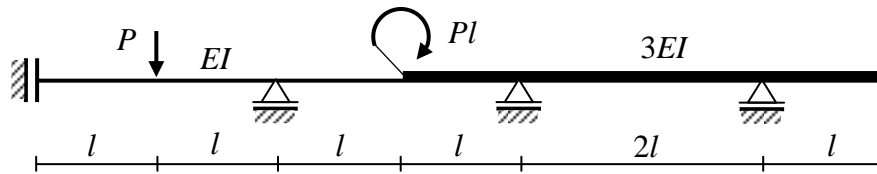


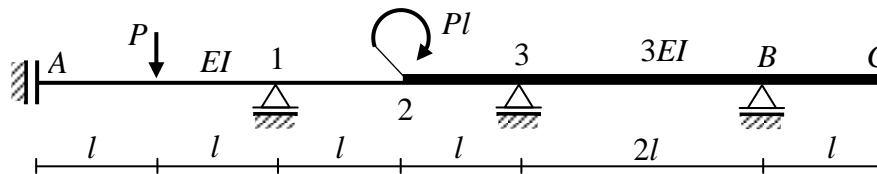
Przykład 7.3. Belka czterokrotnie geometrycznie niewyznaczalna

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej belki korzystając z metody przemieszczeń



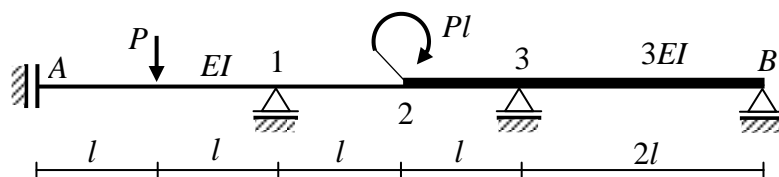
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór oraz węzłów.



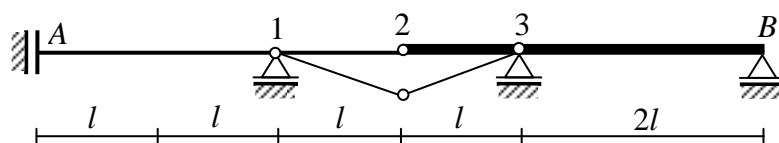
Rys. 2

Przewieszony wspornik BC nie jest obciążony, a zatem w przekroju przywęzłowym BC siły przekrojowe są zerowe. W celu zmniejszenia liczby niewiadomych geometrycznych usuniemy go.



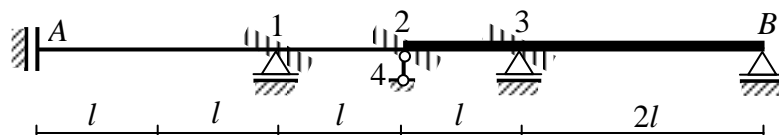
Rys. 3

W powyższej belce niewiadomymi geometrycznymi są kąty obrotu węzłów 1, 2 i 3. Należy również sprawdzić, czy rozpatrywana belka jest układem przesuwным. W tym celu tworzymy z belki łańcuch kinematyczny, wprowadzając w miejscu węzłów 1, 2 i 3 przeguby. W węzle podporowym A nie wprowadzamy przegubu, gdyż we wzorze transformacyjnym dla schematu, w którym jedna z podpór jest utwierdzeniem a druga teleskopowym podparciem, nie występuje kąt obrotu cięciwy jako niewiadoma geometryczna.



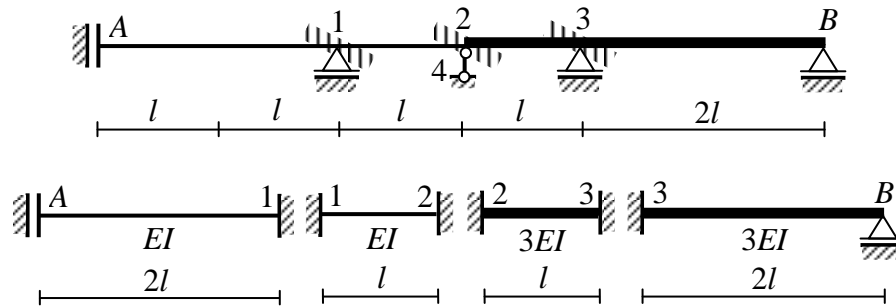
Rys. 4

Rozpatrywany łańcuch kinematyczny jest układem geometrycznie zmiennym, mającym jeden stopień swobody (przesuw punktu 2), a zatem belka, przedstawiona na rysunku 1 jest układem przesuwным. Następnie utworzymy układ geometrycznie wyznaczalny, w którym kąty obrotu węzłów 1, 2 i 3 oraz przesuw węzła 2 są zerowe dzięki wprowadzeniu fikcyjnych więzów blokujących możliwość obrotu węzłów i możliwość przesuwu węzła 2 (więz oznaczony 4 jest prętem o nieskończonej sztywności ściskania).



Rys. 5

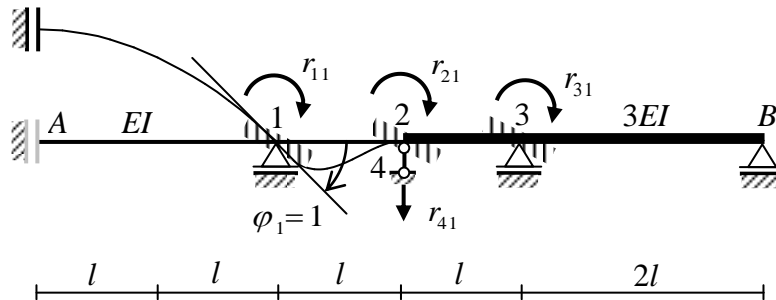
Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy prętów w poszczególnych przęsłach belki.



Rys. 6

Stan $\varphi_1=1$

Obracamy węzeł 1 o kąt $\varphi_1=1$, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{11} . W pozostałych fikcyjnych więzach powstają reakcje: w więzie 2 reakcja r_{21} , w więzie 3 reakcja r_{31} , a w więzie 4 reakcja r_{41} .



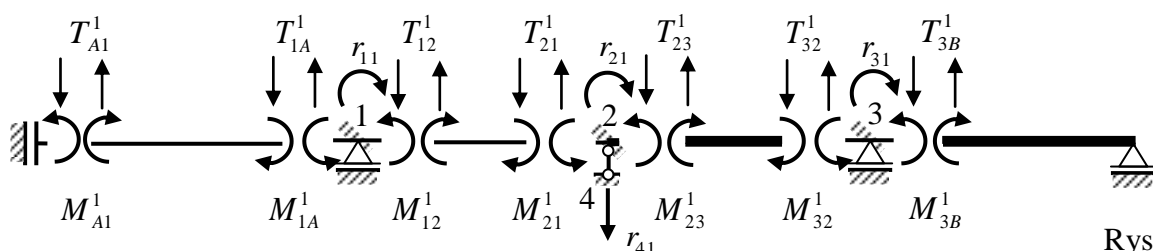
Rys. 7

W przekrojach przywęzłowych A1, 1A, 12 i 21 powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych.

$$M_{A1}^1 = \frac{EI}{2l}(-1) = -\frac{1}{2} \frac{EI}{l}, \quad M_{1A}^1 = \frac{EI}{2l}(1) = \frac{1}{2} \frac{EI}{l}, \quad T_{1A}^1 = T_{A1}^1 = 0$$

$$M_{12}^1 = \frac{2EI}{l}(2 \cdot 1) = \frac{4EI}{l}, \quad M_{21}^1 = \frac{2EI}{l}(1) = \frac{2EI}{l}, \quad T_{12}^1 = T_{21}^1 = -\frac{6EI}{(l)^2}(1) = -\frac{6EI}{l^2}$$

W pozostałych przekrojach przywęzłowych siły tnące i momenty są zerowe. Następnie wyznaczamy reakcje r_{11} , r_{21} , r_{31} i r_{41} oraz sporządzamy wykresy M_1 i T_1 .



Rys. 8

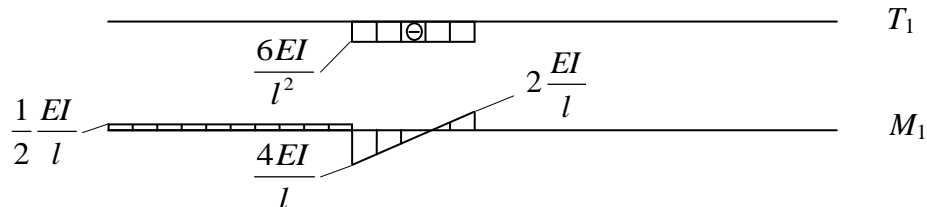
Reakcje r_{11} , r_{21} i r_{31} w miejscach fikcyjnych więzów wyznaczamy z równań sumy momentów dla węzłów 1, 2 i 3, natomiast reakcję r_{41} z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla fikcyjnej podpory 4.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^1 + M_{12}^1 - r_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{11} = \frac{9 EI}{2 l}$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21}^1 + M_{23}^1 - r_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{21} = \frac{2EI}{l}$$

$$\sum_i M_{i3} = 0: \quad M_{32}^1 + M_{3B}^1 - r_{31} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{31} = 0$$

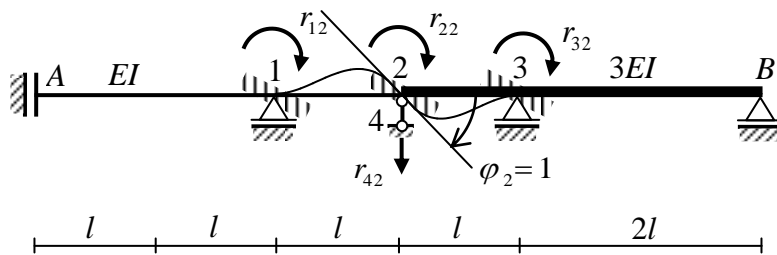
$$\sum_i P_{iy} = 0: \quad T_{21}^1 - T_{23}^1 - r_{41} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{41} = -\frac{6EI}{l^2}$$



Rys. 9

Stan $\varphi_2=1$

Obracamy węzeł 2 o kąt $\varphi_2=1$, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{22} . W pozostałych fikcyjnych więzach powstają reakcje: w więzie 1 reakcja r_{12} , w więzie 3 reakcja r_{32} , a w więzie 4 reakcja r_{42} .

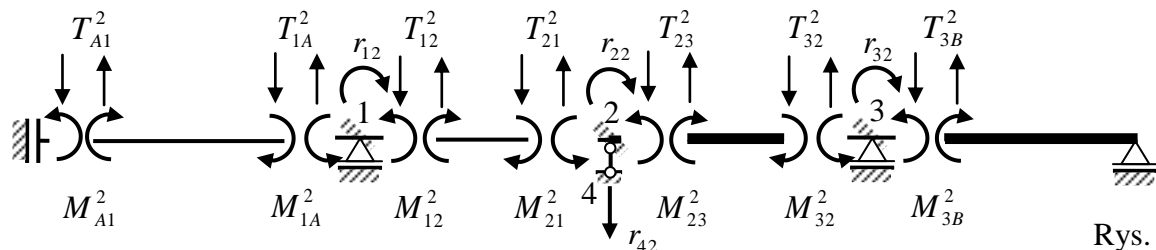


Rys. 10

W przekrojach przywęzłowych 12, 21, 23 i 32 powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych. W pozostałych przekrojach przywęzłowych siły tnące i momenty są zerowe. Następnie wyznaczamy reakcje r_{12} , r_{22} , r_{32} i r_{42} oraz sporządzamy wykresy M_2 oraz T_2 .

$$M_{12}^2 = \frac{2EI}{l}(1) = \frac{2EI}{l}, \quad M_{21}^2 = \frac{2EI}{l}(2 \cdot 1) = \frac{4EI}{l}, \quad T_{12}^2 = T_{21}^2 = -\frac{6EI}{l^2}(1) = -\frac{6EI}{l^2}$$

$$M_{23}^2 = \frac{2 \cdot 3EI}{l}(2 \cdot 1) = \frac{12EI}{l}, \quad M_{32}^2 = \frac{2 \cdot 3EI}{l}(1) = \frac{6EI}{l}, \quad T_{2B}^2 = T_{B2}^2 = -\frac{6 \cdot 3EI}{l^2}(1) = -\frac{18EI}{l^2}$$



Rys. 11

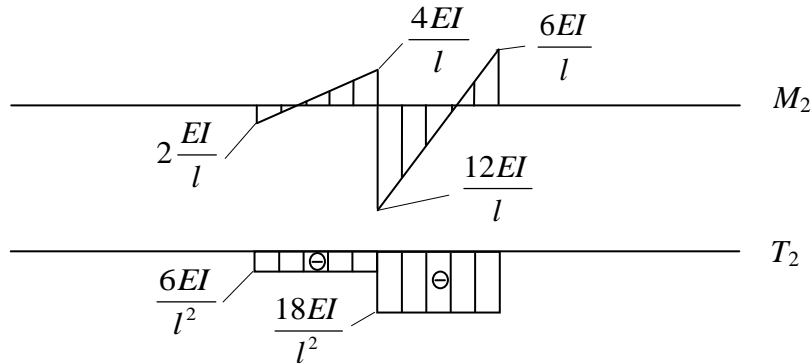
Reakcje r_{12} , r_{22} i r_{32} w miejscach fikcyjnych więzów wyznaczamy z równań sumy momentów dla węzłów 1, 2 i 3, natomiast reakcję r_{42} z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla fikcyjnej podpory 4.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^2 + M_{12}^2 - r_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{12} = \frac{2EI}{l}$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21}^2 + M_{23}^2 - r_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{22} = \frac{16EI}{l}$$

$$\sum_i M_{i3} = 0: \quad M_{32}^2 + M_{3B}^2 - r_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{32} = \frac{6EI}{l}$$

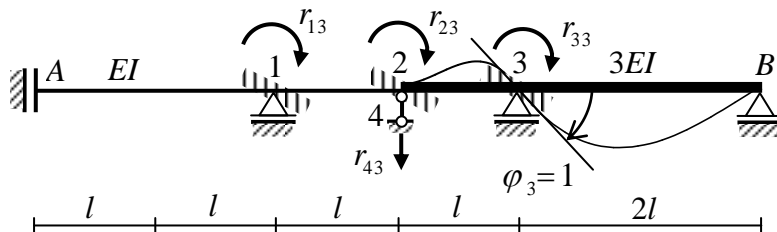
$$\sum_i P_{iy} = 0: \quad T_{21}^2 - T_{23}^2 - r_{42} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{42} = \frac{12EI}{l^2}$$



Rys. 12

Stan $\varphi_3=1$

Obracamy węzeł 3 o kąt $\varphi_3=1$, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{33} . W pozostałych fikcyjnych więzach powstają reakcje: w więzie 1 reakcja r_{13} , w więzie 2 reakcja r_{23} , a w więzie 4 reakcja r_{43} .

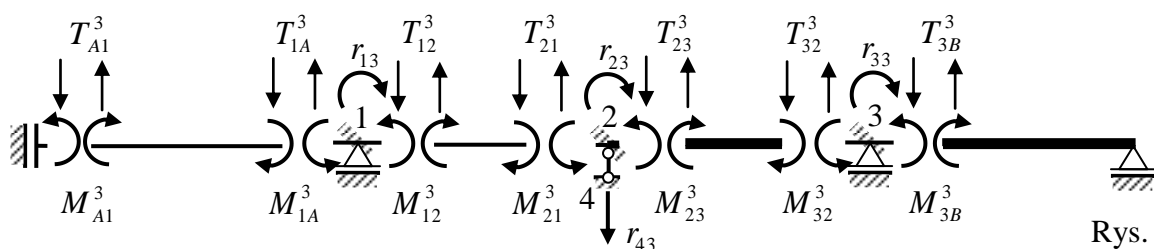


Rys. 13

W przekrojach przywęzłowych 23, 32 i 3B powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych. W pozostałych przekrojach przywęzłowych siły tnące i momenty są zerowe. Następnie wyznaczamy reakcje r_{13} , r_{23} , r_{33} i r_{43} oraz sporządzamy wykresy M_3 oraz T_3 .

$$M_{23}^3 = \frac{2 \cdot 3EI}{l} (1) = \frac{6EI}{l}, \quad M_{32}^3 = \frac{2 \cdot 3EI}{l} (2 \cdot 1) = \frac{12EI}{l}, \quad T_{23}^3 = T_{32}^3 = -\frac{6 \cdot 3EI}{l^2} (1) = -\frac{18EI}{l^2}$$

$$M_{3B}^3 = \frac{3 \cdot 3EI}{2l} (1) = \frac{9EI}{2l}, \quad T_{3B}^3 = T_{B3}^3 = -\frac{3 \cdot 3EI}{(2l)^2} (1) = -\frac{9EI}{4l^2}$$



Rys. 14

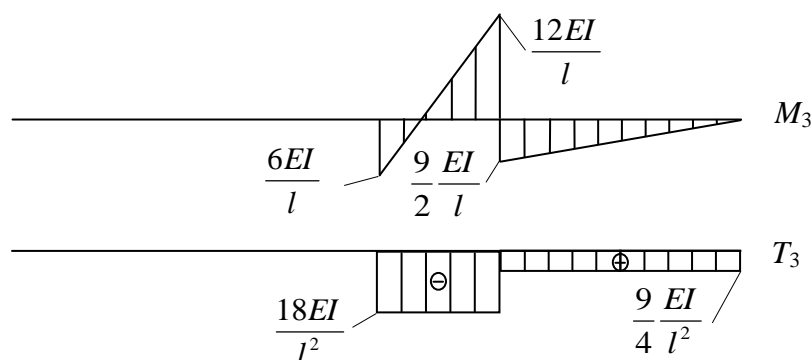
Reakcje r_{13} , r_{23} i r_{33} w miejscach fikcyjnych więzów wyznaczamy z równań sumy momentów dla węzłów 1, 2 i 3, natomiast reakcję r_{43} z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla fikcyjnej podpory 4.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^3 + M_{12}^3 - r_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{13} = 0$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21}^3 + M_{23}^3 - r_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{23} = \frac{6EI}{l}$$

$$\sum_i M_{i3} = 0: \quad M_{32}^3 + M_{3B}^3 - r_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{33} = \frac{33EI}{2l}$$

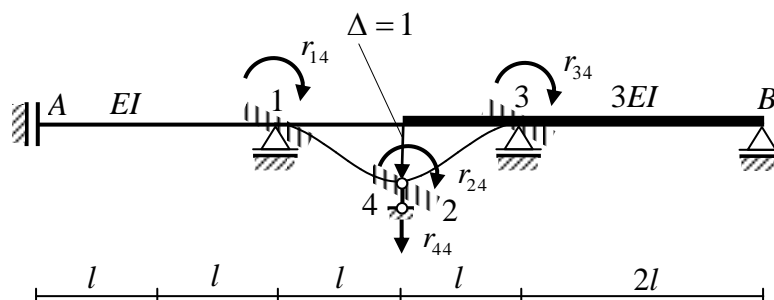
$$\sum_i P_{iy} = 0: \quad T_{21}^3 - T_{23}^3 - r_{43} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{43} = \frac{18EI}{l^2}$$



Rys. 15

Stan $\Delta = 1$

Przemieszczamy węzeł 2 o $\Delta = 1$, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem 4, w którym powstaje reakcja r_{44} . W pozostałych fikcyjnych więzach powstają reakcje: w więzie 1 reakcja r_{14} , w więzie 2 reakcja r_{24} , a w więzie 3 reakcja r_{34} .



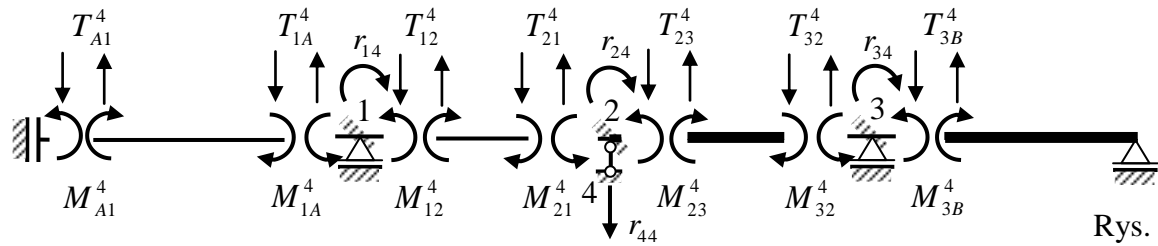
Rys. 16

W przekrojach przywęzłowych 12, 21, 23 i 32 powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych, podstawiając do nich wartości kątów obrotu cięciw. W pozostałych przekrojach przywęzłowych siły tnące i momenty są zerowe. Następnie wyznaczamy reakcje r_{14} , r_{24} , r_{34} i r_{44} oraz sporządzamy wykresy M_4 oraz T_4 .

$$\psi_{12} = \frac{\Delta}{l} = \frac{1}{l}, \quad \psi_{23} = -\frac{\Delta}{l} = -\frac{1}{l}$$

$$M_{12}^4 = M_{21}^4 = \frac{2EI}{l} \left(-3 \cdot \frac{1}{l} \right) = -\frac{6EI}{l^2}, \quad T_{12}^4 = T_{21}^4 = -\frac{6EI}{l^2} \left(-2 \cdot \frac{1}{l} \right) = \frac{12EI}{l^3}$$

$$M_{23}^4 = M_{32}^4 = \frac{2 \cdot 3EI}{l} \left(-3 \cdot \left(-\frac{1}{l} \right) \right) = \frac{18EI}{l^2}, \quad T_{2B}^4 = T_{B2}^4 = -\frac{6 \cdot 3EI}{l^2} \left(-2 \cdot \left(-\frac{1}{l} \right) \right) = -\frac{36EI}{l^3}$$



Rys. 17

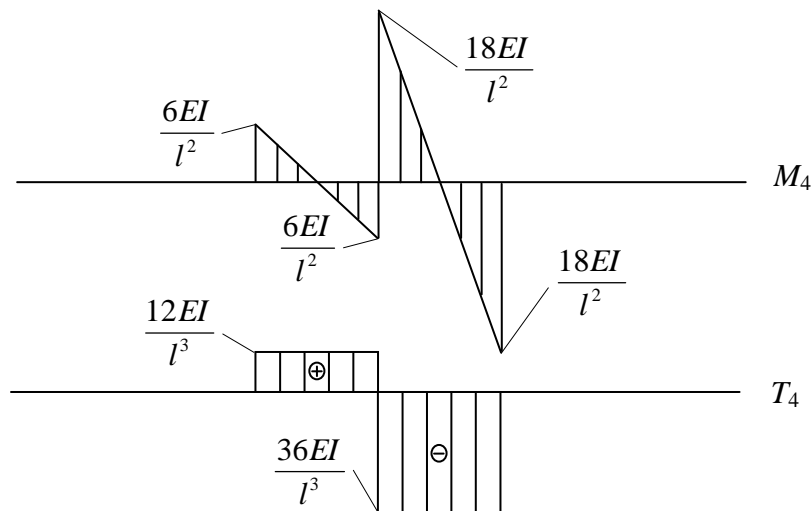
Reakcje r_{14} , r_{24} i r_{34} w miejscach fikcyjnych więzów wyznaczamy z równań sumy momentów dla węzłów 1, 2 i 3, natomiast reakcję r_{44} z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla fikcyjnej podpory 4.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^4 + M_{12}^4 - r_{14} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{14} = -\frac{6EI}{l^2}$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21}^4 + M_{23}^4 - r_{24} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{24} = \frac{12EI}{l^2}$$

$$\sum_i M_{i3} = 0: \quad M_{32}^4 + M_{3B}^4 - r_{34} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{34} = \frac{18EI}{l^2}$$

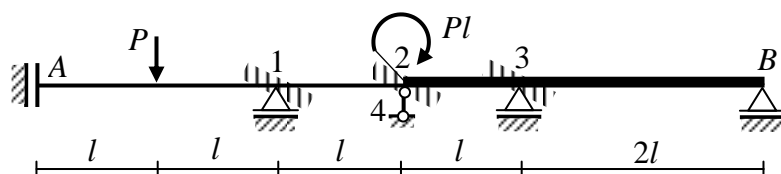
$$\sum_i P_{iy} = 0: \quad T_{21}^4 - T_{23}^4 - r_{44} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{44} = \frac{48EI}{l^3}$$



Rys. 18

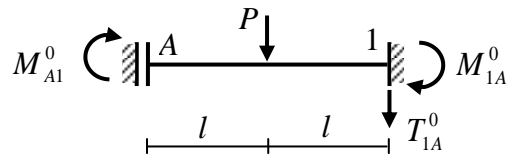
Stan zerowy

Układ geometrycznie wyznaczalny obciążamy obciążeniem zewnętrznym.



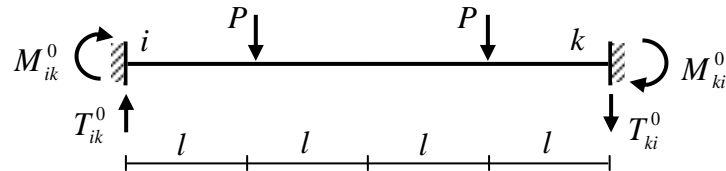
Rys. 19

Jedynie w przęśle A1 występuje obciążenie, które w przekrojach przywęzłowych A1 i 1A wywołuje powstanie wyjściowych momentów i siły tnącej.



Rys. 20

We wprowadzeniu (7.0) nie są podane wyrażenia na momenty wyjściowe w przypadku tego schematu. W celu wyznaczenia tych momentów możemy omawiany schemat potraktować jako połowę schematu symetrycznego pręta obustronnie utwierdzonego.



Rys. 21

$$M_{ik}^0 = -P \cdot 4l \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} Pl, \quad M_{ki}^0 = P \cdot 4l \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} Pl$$

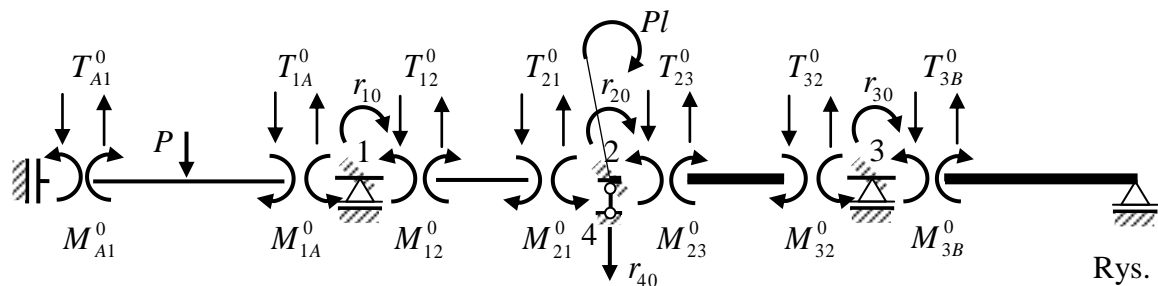
$$T_{ik}^0 = P, \quad T_{ki}^0 = -P$$

Stąd

$$M_{1A}^0 = \frac{3}{4} Pl, \quad T_{1A}^0 = -P$$

Moment wyjściowy w przekroju A1 można wyznaczyć z równania równowagi sumy momentów dla belki z rysunku 20.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad -M_{1A}^0 - M_{A1}^0 + P \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{A1}^0 = \frac{1}{4} Pl$$



Rys. 22

Reakcje r_{10} , r_{20} i r_{30} w miejscach fikcyjnych więzów wyznaczamy z równań sumy momentów dla węzłów 1, 2 i 3, natomiast reakcję r_{40} z równania sumy rzutów sił na oś pionową dla fikcyjnej podpory 4.

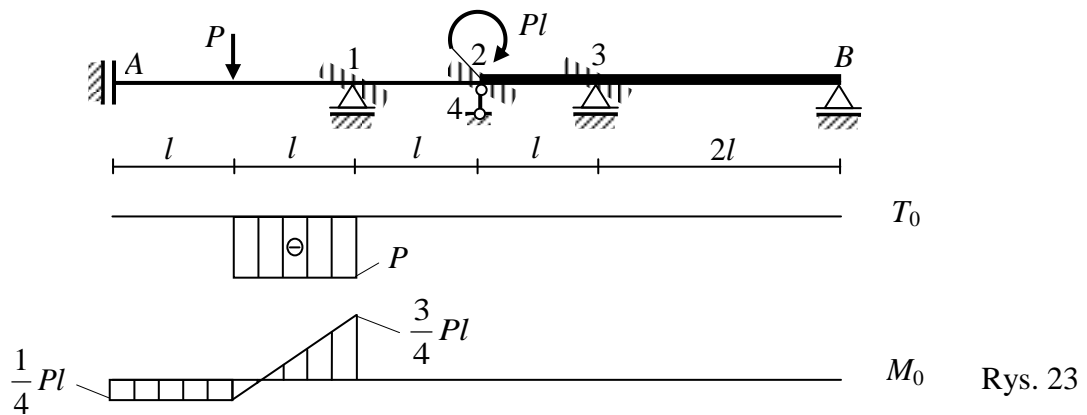
$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^0 + M_{12}^0 - r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = -\frac{3}{4} Pl$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21}^0 + M_{23}^0 - r_{20} - Pl = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{20} = -Pl$$

$$\sum_i M_{i3} = 0: \quad M_{32}^0 + M_{3B}^0 - r_{30} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{30} = 0$$

$$\sum_i P_{iy} = 0: \quad T_{21}^0 - T_{23}^0 - r_{40} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{40} = 0$$

Następnie sporządzamy wykres M_0 i T_0 .



Wyznaczone zostały elementy macierzy sztywności, czyli współczynniki przy niewiadomych układu równań metody przemieszczeń oraz kolumna wyrazów wolnych.

$$\begin{aligned}
 r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot \varphi_2 + r_{13} \cdot \varphi_3 + r_{14} \cdot \Delta + r_{10} &= 0 \\
 r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot \varphi_2 + r_{23} \cdot \varphi_3 + r_{24} \cdot \Delta + r_{20} &= 0 \\
 r_{31} \cdot \varphi_1 + r_{32} \cdot \varphi_2 + r_{33} \cdot \varphi_3 + r_{34} \cdot \Delta + r_{30} &= 0 \\
 r_{41} \cdot \varphi_1 + r_{42} \cdot \varphi_2 + r_{43} \cdot \varphi_3 + r_{44} \cdot \Delta + r_{40} &= 0
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu obliczonych wartości r_{jk} oraz r_{j0} dostajemy poniższy układ równań:

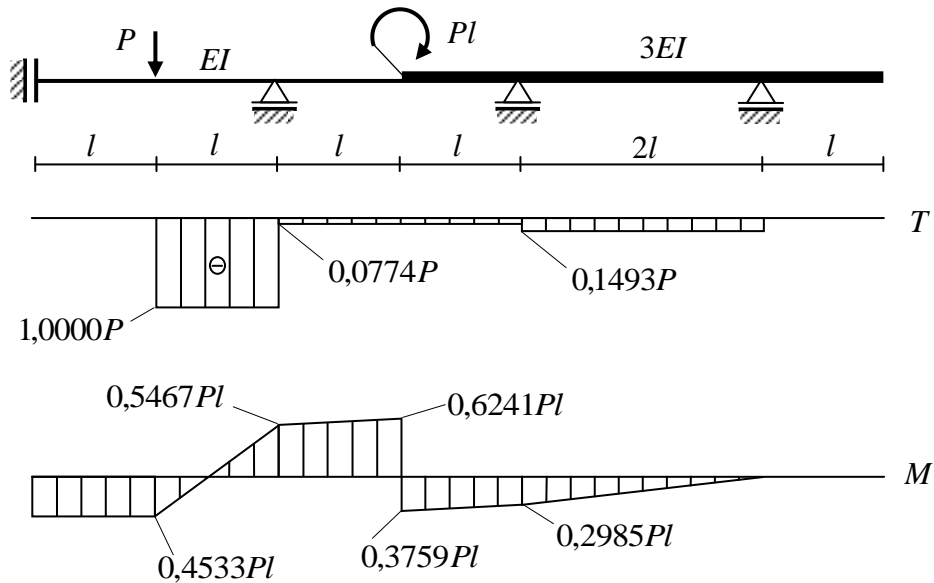
$$\begin{aligned}
 \frac{9}{2} \frac{EI}{l} \cdot \varphi_1 + 2 \frac{EI}{l} \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 - 6 \frac{EI}{l^2} \cdot \Delta + \frac{3}{4} Pl &= 0 \\
 2 \frac{EI}{l} \cdot \varphi_1 + 16 \frac{EI}{l} \cdot \varphi_2 + 6 \frac{EI}{l} \cdot \varphi_3 + 12 \frac{EI}{l^2} \cdot \Delta - Pl &= 0 \\
 0 \cdot \varphi_1 + 6 \frac{EI}{l} \cdot \varphi_2 + \frac{33}{2} \frac{EI}{l} \cdot \varphi_3 + 18 \frac{EI}{l^2} \cdot \Delta + 0 &= 0 \\
 -6 \frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_1 + 12 \frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_2 + 18 \frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_3 + 48 \frac{EI}{l^3} \cdot \Delta + 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu równań jest następujące:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -\frac{331}{814} \frac{Pl^2}{EI} = -0,4066 \frac{Pl^2}{EI} \\
 \varphi_2 &= \frac{291}{1628} \frac{Pl^2}{EI} = 0,1787 \frac{Pl^2}{EI} \\
 \varphi_3 &= \frac{27}{407} \frac{Pl^2}{EI} = 0,0663 \frac{Pl^2}{EI} \\
 \Delta &= -\frac{49}{407} \frac{Pl^3}{EI} = -0,1204 \frac{Pl^3}{EI}
 \end{aligned}$$

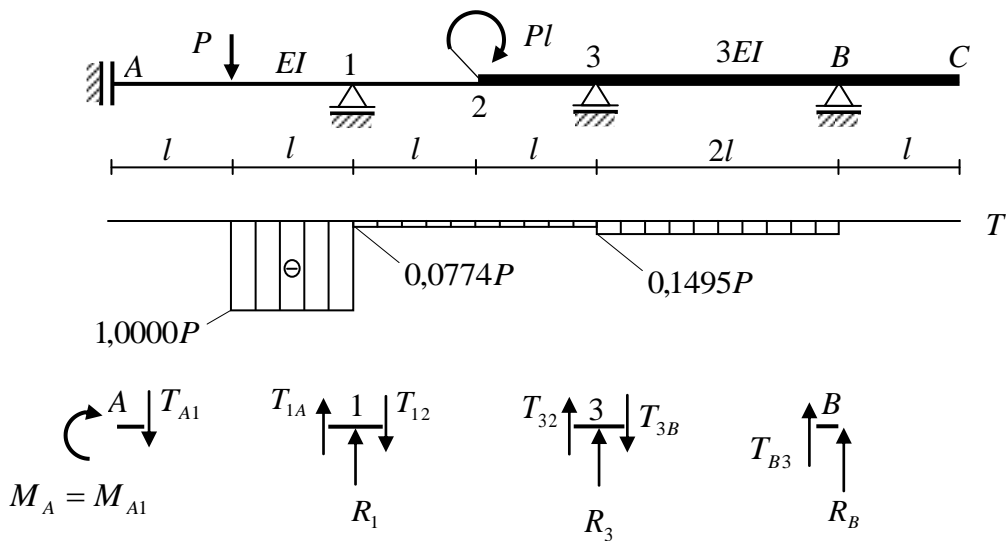
Wykresy sił przekrojowych w rzeczywistym układzie geometrycznie niewyznaczalnym sporządzamy korzystając z wykresów wykonanych w poszczególnych stanach.

$$T = T_1 \cdot \varphi_1 + T_2 \cdot \varphi_2 + T_3 \cdot \varphi_3 + T_4 \cdot \Delta + T_0 \quad M = M_1 \cdot \varphi_1 + M_2 \cdot \varphi_2 + M_3 \cdot \varphi_3 + M_4 \cdot \Delta + M_0$$



Rys. 24

Korzystając z wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczmy wartości reakcji podporowych.



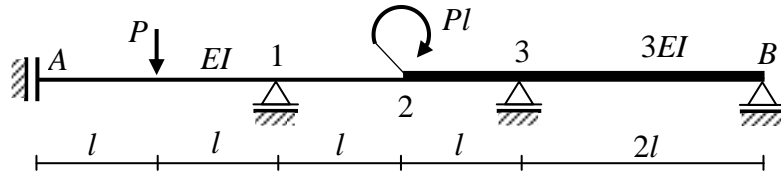
Rys. 25

$$\sum_i P_{iy}^1 = 0: \quad R_1 + T_{1A} - T_{12} = 0 \quad \Rightarrow R_1 = T_{12} - T_{1A} = 0,9226P$$

$$\sum_i P_{iy}^3 = 0: \quad R_3 + T_{32} - T_{3B} = 0 \quad \Rightarrow R_3 = T_{3B} - T_{32} = -0,0721P$$

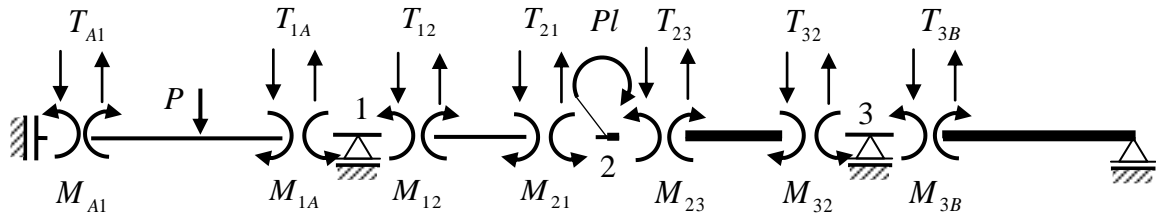
$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad R_B + T_{B3} = 0 \quad \Rightarrow R_B = -T_{B3} = 0,1495P$$

Układ równań metody przemieszczeń dla rozważanej belki możemy otrzymać podstawiając do równań równowagi, stosownych do niewiadomych geometrycznych, siły przekrojowe występujące w przekrojach przywęzłowych. Pominiemy tutaj ustalenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu. Niewiadomymi geometrycznymi są kąty obrotu węzłów 1, 2 i 3 oraz przesuw węzła 2. W celu wyznaczenia tych niewiadomych wykorzystamy równania równowagi stosowne do poszukiwanych niewiadomych geometrycznych.



Rys. 26

W przypadku, gdy niewiadomą jest kąt obrotu węzła, zapisujemy równanie sumy momentów działających na węzeł w przekrojach przywęzłowych, natomiast, gdy niewiadomą jest przesuw węzła, zapisujemy równanie sumy rzutów sił działających na węzeł w przekrojach przywęzłowych na kierunku pionowy (kierunek przesuwu).



Rys. 27

Wyznaczamy momenty w przekrojach przywęzłowych korzystając ze wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe.

$$M_{A1} = \frac{EI}{2l}(-\varphi_1) + M_{A1}^0 = -\frac{EI}{2l}\varphi_1 + \frac{1}{4}Pl$$

$$M_{1A} = \frac{EI}{2l}(\varphi_1) + M_{1A}^0 = \frac{EI}{2l}\varphi_1 + \frac{3}{4}Pl$$

$$M_{12} = \frac{2EI}{l}(2\cdot\varphi_1 + \varphi_2 - 3\cdot\psi_{12}) + M_{12}^0 = \frac{2EI}{l}\left(2\cdot\varphi_1 + \varphi_2 - 3\frac{\Delta}{l}\right) + 0 = \frac{2EI}{l}\left(2\cdot\varphi_1 + \varphi_2 - 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{l}(2\cdot\varphi_2 + \varphi_1 - 3\cdot\psi_{12}) + M_{21}^0 = \frac{2EI}{l}\left(2\cdot\varphi_2 + \varphi_1 - 3\frac{\Delta}{l}\right) + 0 = \frac{2EI}{l}\left(2\cdot\varphi_2 + \varphi_1 - 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{23} = \frac{2\cdot 3EI}{l}(2\cdot\varphi_2 + \varphi_3 - 3\cdot\psi_{23}) + M_{23}^0 = \frac{6EI}{l}\left(2\cdot\varphi_2 + \varphi_3 - 3\left(-\frac{\Delta}{l}\right)\right) + 0 =$$

$$= \frac{6EI}{l}\left(2\cdot\varphi_2 + \varphi_3 + 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{32} = \frac{2\cdot 3EI}{l}(2\cdot\varphi_3 + \varphi_2 - 3\cdot\psi_{23}) + M_{32}^0 = \frac{6EI}{l}\left(2\cdot\varphi_3 + \varphi_2 - 3\left(-\frac{\Delta}{l}\right)\right) + 0 =$$

$$= \frac{6EI}{l}\left(2\cdot\varphi_3 + \varphi_2 + 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{3B} = \frac{3\cdot 3EI}{2l}(\varphi_3) + M_{3B}^0 = \frac{9EI}{2l}(\varphi_3) + 0 = \frac{9EI}{2l}(\varphi_3)$$

$$T_{A1} = 0$$

$$T_{1A} = 0 + T_{1A}^0 = -P$$

$$T_{12} = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_1 + \varphi_2 - 2 \cdot \psi_{12}) + T_{12}^0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\frac{\Delta}{l}\right) + 0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$T_{21} = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_1 + \varphi_2 - 2 \cdot \psi_{12}) + T_{21}^0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\frac{\Delta}{l}\right) + 0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$T_{23} = -\frac{6 \cdot 3EI}{l^2}(\varphi_2 + \varphi_3 - 2 \cdot \psi_{23}) + T_{23}^0 = -\frac{18EI}{l^2}\left(\varphi_2 + \varphi_3 - 2\left(-\frac{\Delta}{l}\right)\right) + 0 =$$

$$= -\frac{18EI}{l^2}\left(\varphi_2 + \varphi_3 + 2\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$T_{32} = -\frac{6 \cdot 3EI}{l^2}(\varphi_2 + \varphi_3 - 2 \cdot \psi_{23}) + T_{32}^0 = -\frac{18EI}{l^2}\left(\varphi_2 + \varphi_3 - 2\left(-\frac{\Delta}{l}\right)\right) + 0 =$$

$$= -\frac{18EI}{l^2}\left(\varphi_2 + \varphi_3 + 2\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$T_{3B} = -\frac{3 \cdot 3EI}{(2l)^2}(\varphi_3) + T_{3B}^0 = -\frac{9EI}{4l^2}\varphi_3 + 0 = -\frac{9EI}{4l^2}\varphi_3$$

$$T_{B3} = -\frac{3 \cdot 3EI}{(2l)^2}(\varphi_3) + T_{B3}^0 = -\frac{9EI}{4l^2}\varphi_3 + 0 = -\frac{9EI}{4l^2}\varphi_3$$

Z równań równowagi otrzymujemy

$$\sum_i M_{i1} = 0: M_{1A} + M_{12} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{2l}\varphi_1 + \frac{3}{4}Pl + \frac{2EI}{l}\left(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\frac{\Delta}{l}\right) = 0$$

Stąd

$$\frac{9}{2}\frac{EI}{l}\varphi_1 + 2\frac{EI}{l}\varphi_2 - 6\frac{EI}{l^2}\Delta + \frac{3}{4}Pl = 0$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: M_{21} + M_{23} - Pl = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{l}\left(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\frac{\Delta}{l}\right) + \frac{6EI}{l}\left(2\varphi_2 + \varphi_3 + 3\frac{\Delta}{l}\right) - Pl = 0$$

Stąd

$$2\frac{EI}{l}\varphi_1 + 16\frac{EI}{l}\varphi_2 + 6\frac{EI}{l}\varphi_3 + 12\frac{EI}{l^2}\Delta - Pl = 0$$

$$\sum_i M_{i3} = 0: M_{32} + M_{3B} = 0 \Rightarrow \frac{6EI}{l}\left(\varphi_2 + 2\varphi_3 + 3\frac{\Delta}{l}\right) + \frac{9}{2}\frac{EI}{l}\varphi_3 = 0$$

Stąd

$$6\frac{EI}{l}\varphi_2 + \frac{33}{2}\frac{EI}{l}\varphi_3 + 18\frac{EI}{l^2}\Delta = 0$$

$$\sum_i P_{iy}^2 = 0 : T_{21} - T_{23} = 0 \Rightarrow -\frac{6EI}{l^2} \left(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\frac{\Delta}{l} \right) + \frac{18EI}{l^2} \left(\varphi_2 + \varphi_3 + 2\frac{\Delta}{l} \right) = 0$$

Stąd

$$-6\frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_1 + 12\frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_2 + 18\frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_3 + 48\frac{EI}{l^3} \cdot \Delta = 0$$

Powyższy układ równań jest identyczny z otrzymanym poprzednio, a zatem rozwiązanie tego układu jest następujące:

$$\varphi_1 = -\frac{331}{814} \frac{Pl^2}{EI} = -0,4066 \frac{Pl^2}{EI}$$

$$\varphi_2 = \frac{291}{1628} \frac{Pl^2}{EI} = 0,1787 \frac{Pl^2}{EI}$$

$$\varphi_3 = \frac{27}{407} \frac{Pl^2}{EI} = 0,0663 \frac{Pl^2}{EI}$$

$$\Delta = -\frac{49}{407} \frac{Pl^3}{EI} = -0,1204 \frac{Pl^3}{EI}$$

Wyznaczamy siły przekrojowe w przekrojach przywęzłowych, podstawiając wyznaczone wartości kątów obrotu węzłów i przesuwu.

$$M_{A1} = -\frac{EI}{2l} \varphi_1 + M_{A1}^0 = -\frac{EI}{2l} \left(-\frac{331}{814} \frac{Pl^2}{EI} \right) + \frac{1}{4} Pl = \frac{369}{814} Pl = 0,4533Pl$$

$$M_{1A} = \frac{EI}{2l} \varphi_1 + M_{1A}^0 = \frac{EI}{2l} \left(-\frac{331}{814} \frac{Pl^2}{EI} \right) + \frac{3}{4} Pl = \frac{445}{814} Pl = 0,5467Pl$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{2EI}{l} \left(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\frac{\Delta}{l} \right) = \frac{2EI}{l} \left(2 \left(-\frac{331}{814} \frac{Pl^2}{EI} \right) + \frac{291}{1628} \frac{Pl^2}{EI} - 3 \left(-\frac{49}{407} \frac{Pl^3}{EI} \right) \frac{1}{l} \right) = \\ &= -\frac{445}{814} Pl = -0,5467Pl \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{2EI}{l} \left(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\frac{\Delta}{l} \right) = \frac{2EI}{l} \left(2 \cdot \frac{291}{1628} \frac{Pl^2}{EI} + \left(-\frac{331}{814} \frac{Pl^2}{EI} \right) - 3 \left(-\frac{49}{407} \frac{Pl^3}{EI} \right) \frac{1}{l} \right) = \\ &= \frac{254}{407} Pl = 0,6241Pl \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{23} &= \frac{6EI}{l} \left(2 \cdot \varphi_2 + \varphi_3 + 3\frac{\Delta}{l} \right) = \frac{6EI}{l} \left(2 \cdot \frac{291}{1628} \frac{Pl^2}{EI} + \frac{27}{407} \frac{Pl^2}{EI} + 3 \left(-\frac{49}{407} \frac{Pl^3}{EI} \right) \frac{1}{l} \right) = \\ &= \frac{153}{407} Pl = 0,3759Pl \end{aligned}$$

$$M_{32} = \frac{6EI}{l} \left(2 \cdot \varphi_3 + \varphi_2 + 3 \frac{\Delta}{l} \right) = \frac{6EI}{l} \left(2 \cdot \frac{27}{407} \frac{Pl^2}{EI} + \frac{291}{1628} \frac{Pl^2}{EI} + 3 \left(-\frac{49}{407} \frac{Pl^3}{EI} \right) \frac{1}{l} \right) =$$

$$= -\frac{243}{814} Pl = -0,2985Pl$$

$$M_{3B} = \frac{9EI}{2l} (\varphi_3) = \frac{9EI}{2l} \cdot \frac{27}{407} \frac{Pl^2}{EI} = \frac{243}{814} Pl = 0,2985Pl$$

$$T_{A1} = 0$$

$$T_{1A} = 0 + T_{1A}^0 = -P$$

$$T_{12} = T_{21} = -\frac{6EI}{l^2} \left(\varphi_1 + \varphi_2 - 2 \frac{\Delta}{l} \right) = -\frac{6EI}{l^2} \left(\left(-\frac{331}{814} \frac{Pl^2}{EI} \right) + \frac{291}{1628} \frac{Pl^2}{EI} - 2 \left(-\frac{49}{407} \frac{Pl^3}{EI} \right) \frac{1}{l} \right) =$$

$$= -\frac{63}{814} P = -0,0774P$$

$$T_{23} = T_{32} = -\frac{18EI}{l^2} \left(\varphi_2 + \varphi_3 - 2 \left(-\frac{\Delta}{l} \right) \right) = -\frac{18EI}{l^2} \left(\frac{291}{1628} \frac{Pl^2}{EI} + \frac{27}{407} \frac{Pl^2}{EI} + 2 \left(-\frac{49}{407} \frac{Pl^3}{EI} \right) \frac{1}{l} \right) =$$

$$= -\frac{63}{814} P = -0,0774P$$

$$T_{3B} = T_{B3} = -\frac{9EI}{4l^2} \varphi_3 = -\frac{9EI}{4l^2} \frac{27}{407} \frac{Pl^2}{EI} = -\frac{243}{1628} P = -0,1493P$$

Jak należało się spodziewać, otrzymane wartości sił przekrojowych są identyczne z wyznaczonymi poprzednio. Można również ograniczyć się do wyznaczenia jedynie momentów w przekrojach przywęzłowych z wykorzystaniem wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe, natomiast wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczyć z równań równowagi dla poszczególnych prętów.

Należy również nadmienić, że rozważana belka jest układem czterokrotnie geometrycznie niewyznaczalnym, natomiast jej stopień statycznej niewyznaczalności jest równy dwa. Z tego powodu zastosowanie metody sił w przypadku tego zadania jest bardziej efektywne.