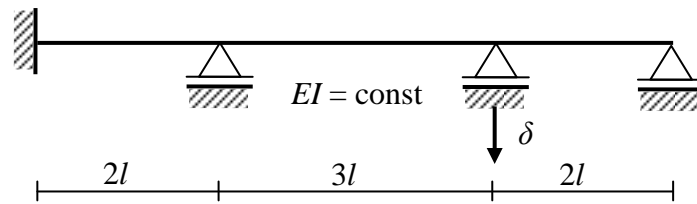


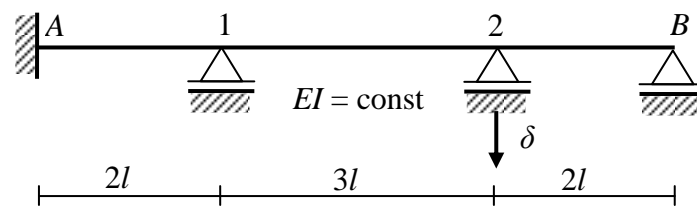
Przykład 7.4. Belka dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalna

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej belki korzystając z metody przemieszczeń



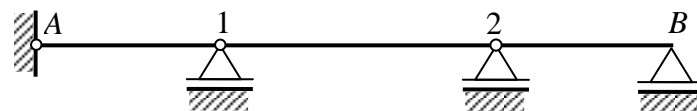
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór.



Rys. 2

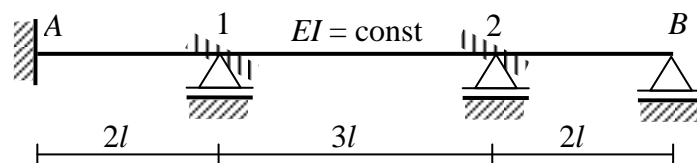
W powyższym układzie niewiadomymi geometrycznymi są kąty obrotu węzłów 1 i 2. Należy również sprawdzić, czy rozpatrywana belka jest układem przesuwным. W tym celu tworzymy z belki łańcuch kinematyczny, wprowadzając w miejscu węzłów A, 1 i 2 przeguby.



Rys. 3

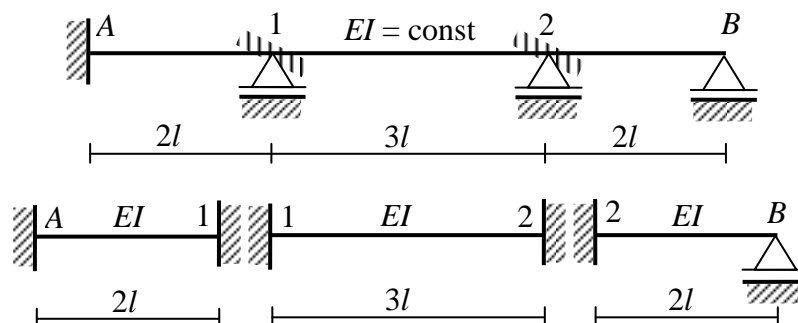
Rozpatrywany łańcuch kinematyczny jest układem geometrycznie niezmiennym, a zatem belka, przedstawiona na rysunku 1 jest układem nieprzesuwным. W układzie nieprzesuwным jako niewiadome nie występują kąty obrotu cięciw odkształconych prętów.

Następnie utworzymy układ geometrycznie wyznaczalny, w którym kąty obrotu węzłów 1 i 2 są zerowe dzięki wprowadzeniu fikcyjnych więzów blokujących możliwość obrotu węzłów 1 i 2.



Rys. 4

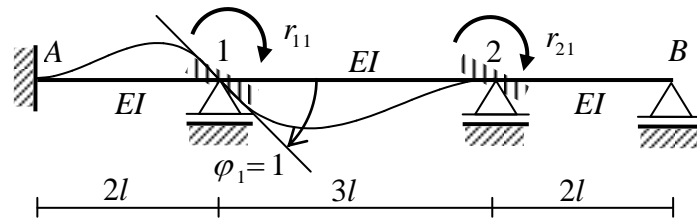
Niewiadomymi geometrycznymi są kąty obrotu węzłów 1 i 2. Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy prętów w poszczególnych przęsłach belki.



Rys. 5

Stan $\varphi_1=1$

Obracamy węzeł 1 o kąt $\varphi_1=1$, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{11} . W fikcyjnym więzie 2 powstaje reakcja r_{21} .

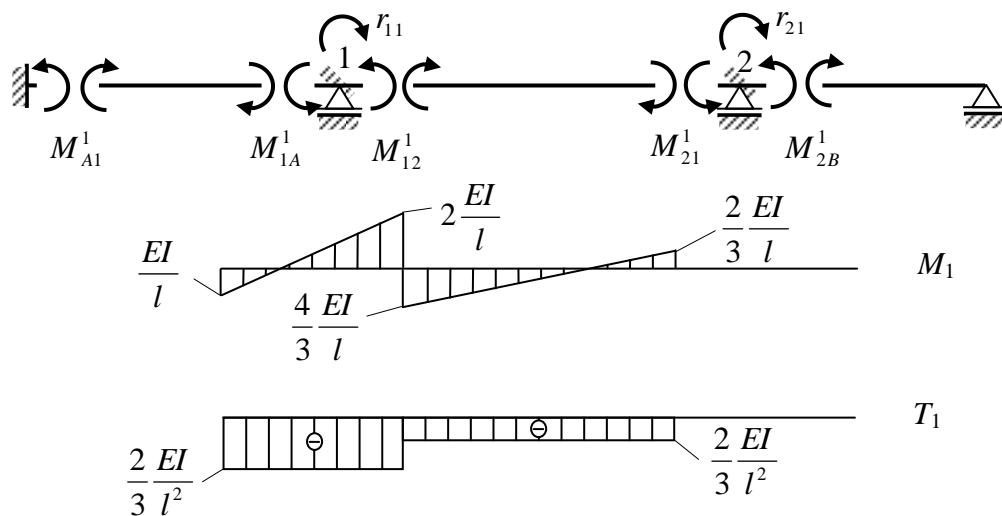


Rys. 6

W przekrojach przywęzłowych A1, 1A, 12 i 21 powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych. Następnie sporządzamy wykresy M_1 i T_1 oraz wyznaczamy reakcje r_{11} i r_{21} .

$$M_{A1}^1 = \frac{2EI}{2l}(1) = \frac{EI}{l}, \quad M_{1A}^1 = \frac{2EI}{2l}(2 \cdot 1) = \frac{2EI}{l}, \quad T_{1A}^1 = T_{A1}^1 = -\frac{6EI}{(2l)^2}(1) = -\frac{3EI}{2l^2}$$

$$M_{12}^1 = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot 1) = \frac{4EI}{3l}, \quad M_{21}^1 = \frac{2EI}{3l}(1) = \frac{2EI}{3l}, \quad T_{12}^1 = T_{21}^1 = -\frac{6EI}{(3l)^2}(1) = -\frac{2EI}{3l^2}$$



Rys. 7

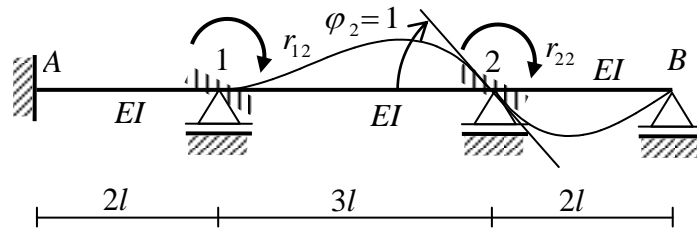
Reakcje r_{11} i r_{21} w miejscach fikcyjnych więzów wyznaczamy z równań sumy momentów dla węzłów 1 i 2.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^1 + M_{12}^1 - r_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{11} = \frac{10EI}{3l}$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21}^1 - r_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{21} = \frac{2EI}{3l}$$

Stan $\varphi_2=1$

Obracamy węzeł 2 o kąt $\varphi_2=1$, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{22} . W fikcyjnym więzie 1 powstaje reakcja r_{12} .

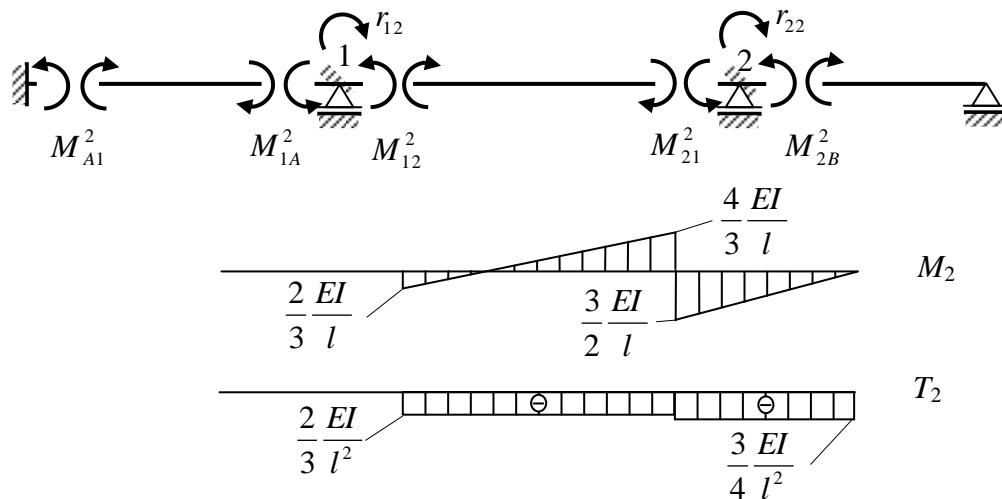


Rys. 8

W przekrojach przywęzłowych 12, 21 i 1B powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych. Następnie sporządzamy wykresy M_2 i T_2 oraz wyznaczamy reakcje r_{22} i r_{12} .

$$M_{12}^2 = \frac{2EI}{3l}(1) = \frac{2EI}{3l}, \quad M_{21}^2 = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot 1) = \frac{4EI}{3l}, \quad T_{12}^2 = T_{21}^2 = -\frac{6EI}{(3l)^2}(1) = -\frac{2EI}{3l^2}$$

$$M_{2B}^2 = \frac{3EI}{2l}(1) = \frac{3EI}{2l}, \quad T_{2B}^2 = T_{B2}^2 = -\frac{3EI}{(2l)^2}(1) = -\frac{3EI}{4l^2}$$



Rys. 9

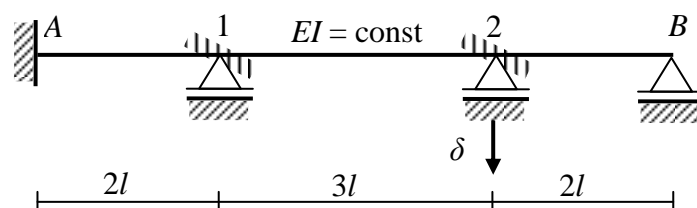
Reakcje r_{12} i r_{22} w miejscach fikcyjnych więzów wyznaczamy z równań sumy momentów dla węzłów 1 i 2.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{12}^2 - r_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{12} = \frac{2EI}{3l}$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21}^2 + M_{2B}^2 - r_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{22} = \frac{17EI}{6l}$$

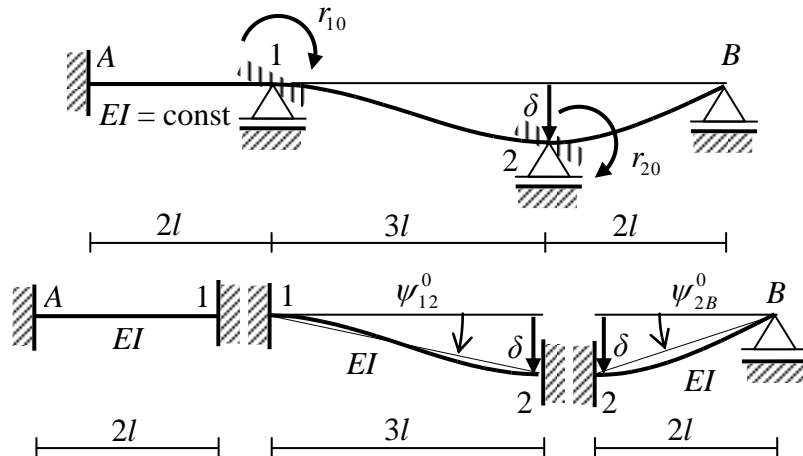
Stan zerowy

Układ geometrycznie wyznaczalny obciążamy obciążeniem zewnętrznym.



Rys. 10

W rozpatrywanym układzie obciążenie stanowi błąd montażowy.



Rys. 11

W celu wyznaczenia momentów i sił tnących działających w przekrojach przywęzłowych w stanie zerowym korzystamy ze wzorów transformacyjnych, do których podstawiamy wartości kątów obrotu cięciw prętów 12 i 2B.

$$\psi_{12}^0 = \frac{\delta}{3l}, \quad \psi_{2B}^0 = -\frac{\delta}{2l}$$

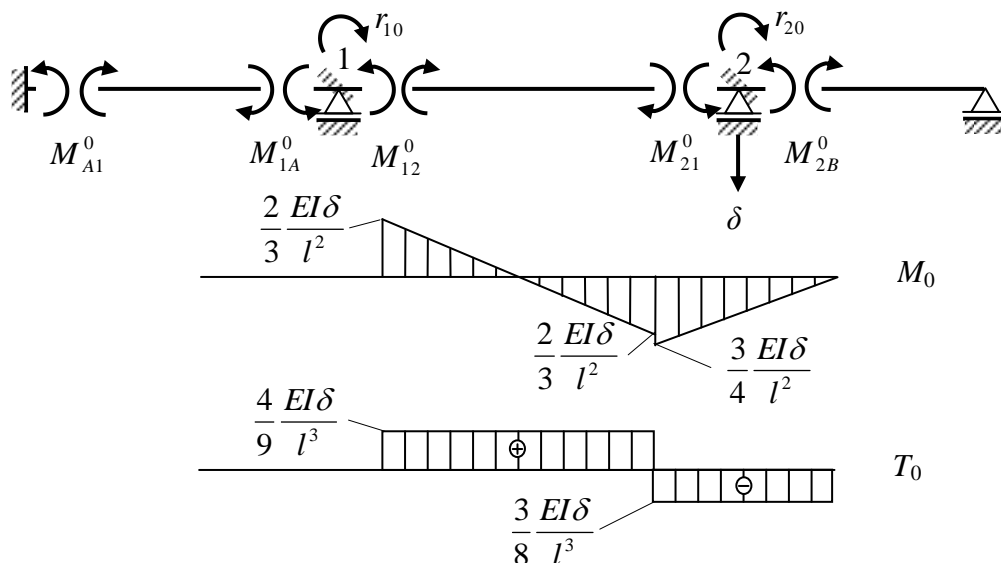
$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = \frac{2EI}{3l} (-3 \cdot \psi_{12}^0) = \frac{2EI}{3l} \left(-3 \cdot \frac{\delta}{3l} \right) = -\frac{2}{3} \frac{EI\delta}{l^2}$$

$$T_{12}^0 = T_{21}^0 = -\frac{6EI}{(3l)^2} (-2 \cdot \psi_{12}^0) = -\frac{6EI}{(3l)^2} \left(-2 \cdot \frac{\delta}{3l} \right) = \frac{4}{9} \frac{EI\delta}{l^3}$$

$$M_{2B}^0 = \frac{3EI}{2l} (-\psi_{2B}^0) = \frac{3EI}{2l} \left(-\left(-\frac{\delta}{2l} \right) \right) = \frac{3}{4} \frac{EI\delta}{l^2}$$

$$T_{2B}^0 = T_{B2}^0 = -\frac{3EI}{(2l)^2} (-\psi_{2B}^0) = -\frac{3EI}{(2l)^2} \left(-\left(-\frac{\delta}{2l} \right) \right) = -\frac{3}{8} \frac{EI\delta}{l^3}$$

Następnie sporządzamy wykres M_0 i T_0 oraz wyznaczamy reakcje r_{10} i r_{20} .



Rys. 12

Reakcję r_{10} w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^0 + M_{12}^0 - r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = -\frac{2 EI \delta}{3 l^2}$$

Analogicznie reakcję r_{20} w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 2.

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21}^0 + M_{2B}^0 - r_{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{20} = \frac{1 EI \delta}{12 l^2}$$

Wyznaczone zostały elementy macierzy sztywności, czyli współczynniki przy niewiadomych układu równań metody przemieszczeń oraz kolumna wyrazów wolnych.

$$r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot \varphi_2 + r_{10} = 0$$

$$r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot \varphi_2 + r_{20} = 0$$

Po podstawieniu obliczonych wartości r_{jk} oraz r_{j0} dostajemy poniższy układ równań:

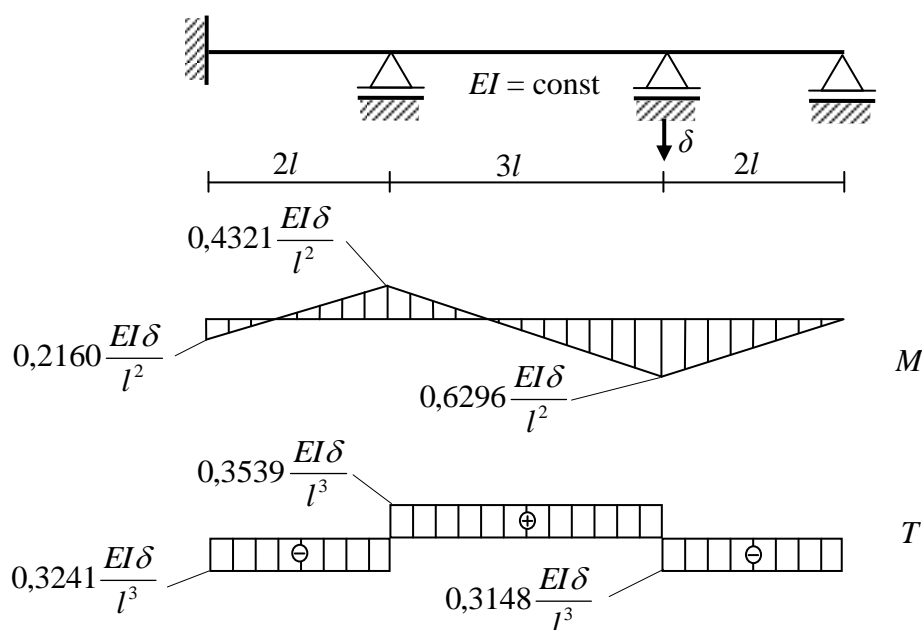
$$\begin{aligned} \frac{10 EI}{3 l} \cdot \varphi_1 + \frac{2 EI}{3 l} \cdot \varphi_2 - \frac{2 EI \delta}{3 l^2} &= 0 \\ \frac{2 EI}{3 l} \cdot \varphi_1 + \frac{17 EI}{6 l} \cdot \varphi_2 + \frac{1 EI \delta}{12 l^2} &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu równań jest następujące:

$$\varphi_1 = \frac{35 \delta}{162 l}, \quad \varphi_2 = -\frac{13 \delta}{162 l}$$

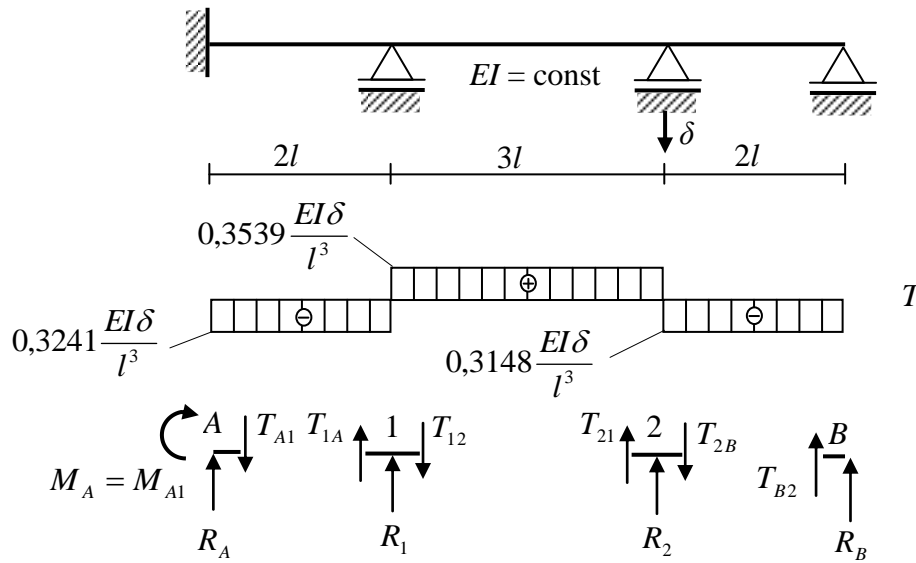
Wykresy sił przekrojowych w rzeczywistym układzie geometrycznie niewyznaczalnym sporządzamy korzystając z wykresów wykonanych w poszczególnych stanach.

$$T = T_1 \cdot \varphi_1 + T_2 \cdot \varphi_2 + T_0 \quad M = M_1 \cdot \varphi_1 + M_2 \cdot \varphi_2 + M_0$$



Rys. 13

Korzystając z wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczmy wartości reakcji podporowych.



Rys. 14

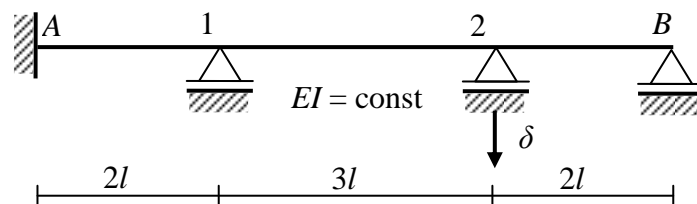
$$\sum_i P_{iy}^A = 0: \quad R_A - T_{A1} = 0 \quad \Rightarrow R_A = T_{A1} = -0,3241 \frac{EI\delta}{l^3}$$

$$\sum_i P_{iy}^1 = 0: \quad R_1 + T_{1A} - T_{12} = 0 \quad \Rightarrow R_1 = T_{12} - T_{1A} = 0,6780 \frac{EI\delta}{l^3}$$

$$\sum_i P_{iy}^2 = 0: \quad R_2 + T_{21} - T_{2B} = 0 \quad \Rightarrow R_2 = T_{2B} - T_{21} = -0,6687 \frac{EI\delta}{l^3}$$

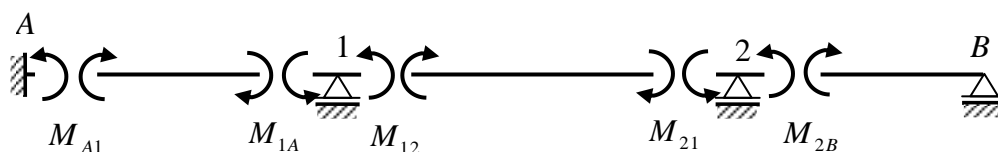
$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad R_B + T_{B2} = 0 \quad \Rightarrow R_B = -T_{B2} = 0,3148 \frac{EI\delta}{l^3}$$

Układ równań metody przemieszczeń dla rozważanej belki możemy otrzymać podstawiając do równań równowagi, stosownych do niewiadomych geometrycznych, siły przekrojowe występujące w przekrojach przywęzłowych. Pominiemy tutaj ustalenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu.



Rys. 15

Niewiadomymi geometrycznymi są kąty obrotu węzłów 1 i 2. W celu wyznaczenia tych niewiadomych wykorzystamy równania równowagi stosowne do poszukiwanych niewiadomych geometrycznych. W przypadku, gdy niewiadomą jest kąt obrotu węzła, zapisujemy równanie sumy momentów działających na węzeł w przekrojach przywęzłowych.



Rys. 16

Wyznaczamy momenty w przekrojach przywęzłowych korzystając ze wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe.

$$M_{A1} = \frac{2EI}{2l}(\varphi_1) + M_{A1}^0 = \frac{EI}{l}\varphi_1 + 0 = \frac{EI}{l}\varphi_1$$

$$M_{1A} = \frac{2EI}{2l}(2 \cdot \varphi_1) + M_{1A}^0 = \frac{2EI}{l}\varphi_1 + 0 = \frac{2EI}{l}\varphi_1$$

$$M_{12} = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) + M_{12}^0 = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) + \frac{2EI}{3l}\left(-3 \cdot \frac{\delta}{3l}\right) = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) - \frac{2EI\delta}{3l^2}$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot \varphi_2 + \varphi_1) + M_{21}^0 = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot \varphi_2 + \varphi_1) + \frac{2EI}{3l}\left(-3 \cdot \frac{\delta}{3l}\right) = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot \varphi_2 + \varphi_1) - \frac{2EI\delta}{3l^2}$$

$$M_{2B} = \frac{3EI}{2l}(\varphi_2) + M_{2B}^0 = \frac{3EI}{2l}(\varphi_2) + \frac{3EI}{2l}\left(-\left(-\frac{\delta}{2l}\right)\right) = \frac{3EI}{2l}(\varphi_2) + \frac{3EI\delta}{4l^2}$$

Otrzymujemy równania

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A} + M_{12} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{l}\varphi_1 + \frac{2EI}{3l}(2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) - \frac{2EI\delta}{3l^2} = 0$$

Stąd

$$\frac{10}{3} \frac{EI}{l}\varphi_1 + \frac{2}{3} \frac{EI}{l}\varphi_2 - \frac{2}{3} \frac{EI\delta}{l^2} = 0$$

$$\sum_i M_{i2} = 0: \quad M_{21} + M_{2B} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{3l}(\varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2) - \frac{2EI\delta}{3l^2} + \frac{3EI}{2l}\varphi_2 + \frac{3EI\delta}{4l^2} = 0$$

Stąd

$$\frac{2}{3} \frac{EI}{l}\varphi_1 + \frac{17}{6} \frac{EI}{l}\varphi_2 + \frac{1}{12} \frac{EI\delta}{l^2} = 0$$

Powyższy układ równań jest identyczny z otrzymanym poprzednio, a zatem rozwiązanie tego układu jest następujące:

$$\varphi_1 = \frac{35}{162} \frac{\delta}{l}, \quad \varphi_2 = -\frac{13}{162} \frac{\delta}{l}$$

Wyznaczamy siły przekrojowe w przekrojach przywęzłowych

$$M_{A1} = \frac{EI}{l}\varphi_1 = \frac{EI}{l}\left(\frac{35}{162} \frac{\delta}{l}\right) = 0,2160 \frac{EI\delta}{l^2}$$

$$M_{1A} = \frac{2EI}{l}\varphi_1 = \frac{2EI}{l}\left(\frac{35}{162} \frac{\delta}{l}\right) = 0,4321 \frac{EI\delta}{l^2}$$

$$M_{12} = \frac{2EI}{3l}(2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) - \frac{2EI\delta}{3l^2} = \frac{2EI}{3l}\left(2 \cdot \frac{35}{162} \cdot \frac{\delta}{l} - \frac{13}{162} \cdot \frac{\delta}{l}\right) - \frac{2EI\delta}{3l^2} = -0,4321 \frac{EI\delta}{l^2}$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{3l} (\varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2) - \frac{2EI\delta}{3l^2} = \frac{2EI}{3l} \left(\frac{35}{162} \cdot \frac{\delta}{l} + 2 \left(-\frac{13}{162} \cdot \frac{\delta}{l} \right) \right) - \frac{2EI\delta}{3l^2} = -0,6296 \frac{EI\delta}{l^2}$$

$$M_{2B} = \frac{3EI}{2l} (\varphi_2) + \frac{3EI\delta}{4l^2} = \frac{3EI}{2l} \left(-\frac{13}{162} \frac{\delta}{l} \right) + \frac{3EI\delta}{4l^2} = 0,6296 \frac{EI\delta}{l^2}$$

$$T_{A1} = T_{1A} = -\frac{6EI}{(2l)^2} (\varphi_1) = -\frac{3EI}{2l^2} \left(\frac{35}{162} \frac{\delta}{l} \right) = -0,3241 \frac{EI\delta}{l^3}$$

$$T_{12} = -\frac{6EI}{(3l)^2} (\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{6EI}{(3l)^2} \left(-2 \cdot \frac{\delta}{3l} \right) = -\frac{3EI}{2l^2} \left(\frac{35}{162} \frac{\delta}{l} - \frac{13}{162} \frac{\delta}{l} \right) + \frac{4}{9} \frac{EI\delta}{l^3} = 0,3539 \frac{EI\delta}{l^3}$$

$$T_{21} = T_{12} = 0,3539 \frac{EI\delta}{l^3}$$

$$T_{2B} = T_{B2} = \frac{3EI}{(2l)^2} \varphi_2 - \frac{3EI}{(2l)^2} \left(-2 \cdot \left(-\frac{\delta}{2l} \right) \right) = -\frac{3EI}{4l^2} \left(-\frac{13}{162} \frac{\delta}{l} \right) - \frac{3}{8} \frac{EI\delta}{l^3} = -0,3148 \frac{EI\delta}{l^3}$$

Jak należało się spodziewać, otrzymane wartości sił przekrojowych są identyczne z poprzednio wyznaczonymi. Można również ograniczyć się do wyznaczenia jedynie momentów w przekrojach przywęzłowych z wykorzystaniem wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe, natomiast wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczyć z równań równowagi dla poszczególnych prętów.