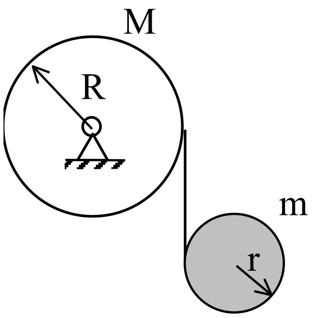
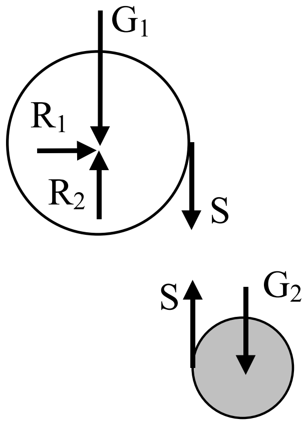
Przykład 6.2. Wyznaczanie przyspieszenia krążka

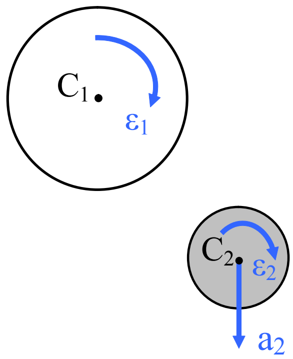


Nić nawinięta jest na krążek o promieniu R i masie M osadzony na łożysku bez tarcia. Drugi koniec nici odwija się z krążka o promieniu r i masie m. Pomiędzy krążkami a nicią nie ma poślizgu. Nić jest nieważka i nierozciągliwa.
Znaleźć przyspieszenie kątowe krążka o masie m i przyspieszenie jego środka.

Rozwiązanie

Po uwolnieniu z więzów otrzymujemy układ sił przedstawiony na rysunku poniżej, gdzie oznaczono: S – siłę naciągu nici, G_1 =Mg – ciężar krążka o masie M, G_2 =mg – ciężar krążka o masie m, R_1 i R_2 – składowe reakcji podpory nieprzesuwnej.





Ruch krążków w ruchu płaskim charakteryzują wielkości kinematyczne:
a_1 – przyspieszenie środka masy krążka M oznaczonego jako C_1 (punkt nieruchomy $a_1 = 0$)
a_2 – przyspieszenie środka masy krążka m oznaczonego jako C_2
ε_1 – przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego krążka o masie M względem C_1
ε_2 – przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego krążka o masie m względem C_2

Ruch masy M opisują:
- równania ruchu środka masy C_1
  $M\, a_{1x} = R_1$
  $M\, a_{1y} = G_1 + S - R_2$
- równanie ruchu obrotowego masy M względem stałej osi (punktu C_1)
  $J_{zC1}\, \varepsilon_1 = S\, R.$

Ruch masy m opisują:
- równanie ruchu prostoliniowego środka masy C_2
  $m\, a_{2x} = 0$
  $m\, a_{2y} = G_2 - S$
- równanie ruchu obrotowego wokół środka masy C_2
  $J_{zC2}\, \varepsilon_2 = S\, r.$

Możemy zauważyć, że

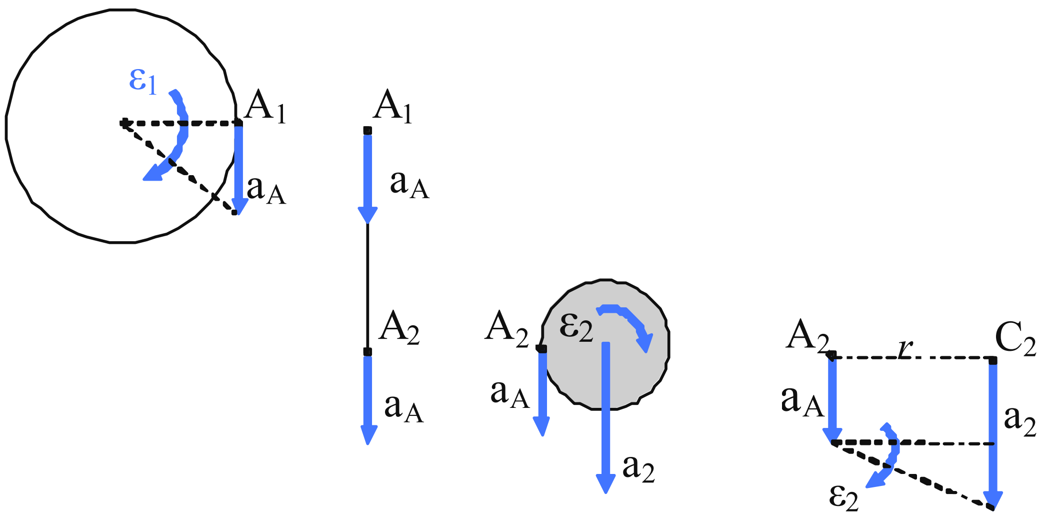
$a_{1x} = a_{1y} = 0$ – ponieważ punkt C_1 jest nieruchomy,

$a_{2x} = 0$, $a_{2y} = a_2$ – gdyż punkt C_2 porusza się pionowo w dół.

Uwzględniając powyższe, równania ruchu przyjmują postać:

$$\begin{cases} J_{zC1}\,\varepsilon_1 = S\,R. \\ m\,a_2 = G_2 - S \\ J_{zC2}\,\varepsilon_2 = S\,r. \end{cases}$$

Ruch mas M i m nie odbywa się niezależnie, możemy zatem ustalić zależności wynikające z więzów – tzw. równanie więzów.



Przyspieszenie a_A punktu A_1 wynikające z ruchu obrotowego krążka „M" ma kierunek składowej stycznej, gdyż składowa normalna równa jest zeru (ruch rozpoczyna się bez prędkości początkowej). Wynosi ono $a_A = \varepsilon_1 R$.

Ponieważ nić jest nierozciągliwa, to na jej odcinku A_1A_2 przyspieszenie jest identyczne w każdym punkcie, stąd przyspieszenie punktu A_2 wynosi a_A.

Związek między przyspieszeniami dwóch punktów A_2 i C_2 krążka „m" znajdziemy wyrażając przyspieszenie punktu C_2 jako sumę przyspieszenia bieguna (punkt A_2) i przyspieszenia w ruchu obrotowym krążka o masie m względem tego bieguna z przyspieszeniem kątowym ε_2 (porównaj rysunek)

$$a_2 = a_p + \varepsilon_2 r = \varepsilon_1 R + \varepsilon_2 r\,.$$

Podstawiając wielkości momentów bezwładności krążków

$$J_{zC1} = \tfrac{1}{2} MR^2 \;\text{ i }\; J_{zC2} = \tfrac{1}{2} mr^2\,,$$

oraz uwzględniając ich ciężary, otrzymujemy ostatecznie układ równań:

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2} MR^2\,\varepsilon_1 = S\,R \\ ma_2 = mg - S \\ \tfrac{1}{2} mr^2\,\varepsilon_2 = S\,r \\ a_2 = \varepsilon_1 R + \varepsilon_2 r \end{cases}$$

Układ rozwiązujemy względem poszukiwanych a_2 i ε_2 otrzymując

$$a_2 = 2\frac{m+M}{2m+3M}g \qquad \varepsilon_2 = 2\frac{M}{2m+3M}\cdot\frac{g}{r}\,.$$

Zatem krążek porusza się w założonym kierunku.

Pozostałe niewiadome układu wynoszą:

$$\varepsilon_1 = 2\frac{m}{2m+3M}\cdot\frac{g}{R} \qquad S = \frac{mM}{2m+3M}\,g\,.$$