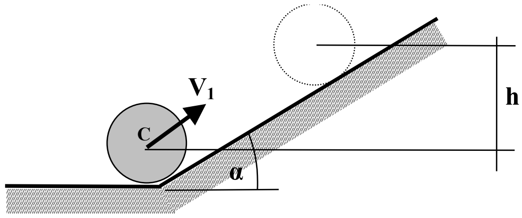
Przykład 6.3. Wyznaczanie przebytej drogi

Środek walca o masie **m** i promieniu **r** ma u podstawy równi pochyłej prędkość $\mathbf{v_1}$ skierowaną jak na rysunku. Walec toczy się bez poślizgu.

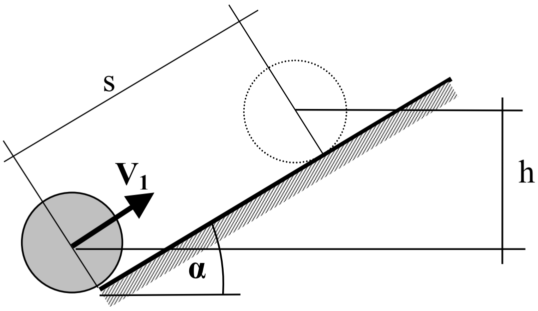
Znane są :

r – promień walca,
m – masa walca,
α - kąt między równią a poziomem,
f - współczynnik tarcia przy toczeniu,
g – przyspieszenie ziemskie,
v_1– prędkość środka walca na początku równi



Oblicz, na jaką maksymalną wysokość wzniesie się walec.

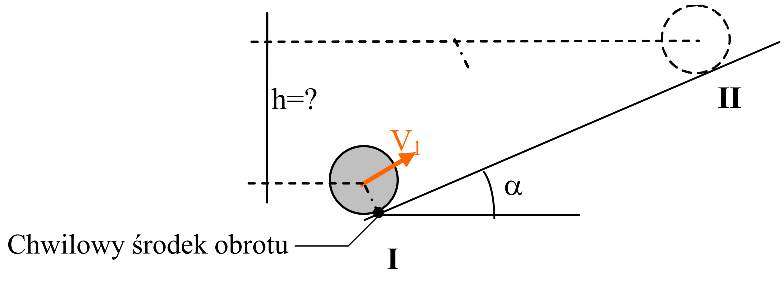
Rozwiązanie



Niech s oznacza drogę wzdłuż równi, jaką przebył środek walca do chwili zatrzymania. Walec w tym czasie wykonał obrót o kat $\varphi = s/r$. Wysokość h, jaką osiągnie środek walca określa zależność $h=s\cdot\sin\alpha$.
Do wyznaczenia położenia końcowego korzystne będzie zastosowanie zasady zachowania energii bryły sztywnej, gdyż w zadaniu znane są prędkości w określonych położeniach.
Energia mechaniczna określona jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej i jej przyrost podczas ruchu równy jest sumie prac wykonanych w tym czasie przez siły działające na bryłę

$$E_m = E_p + E_k\ ,\ \Delta E_m= W$$

Jako poziom odniesienia przyjmiemy poziom środka walca u podstawy równi.



Przyjmijmy, że w położeniu początkowym energia potencjalna walca jest równa zeru, a energia kinetyczna wynosi

$$E_{kI} = ½\, mv_1^2 + ½\, J\omega_1^2\ .$$

Jest ona sumą energii poruszającego się z prędkością v_1 środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy z prędkością kątową ω_1. Prędkość ω_1 w chwili początkowej wynosi

$\omega_I = v_I/r$, gdyż chwilowy środek obrotu walca (przy założeniu toczenia bez poślizgu) znajduje się w punkcie styczności z podłożem.
Moment bezwładności walca o promieniu r i masie m względem jego osi wynosi $J = ½ mr^2$.
W położeniu początkowym energia mechaniczna układu wynosi

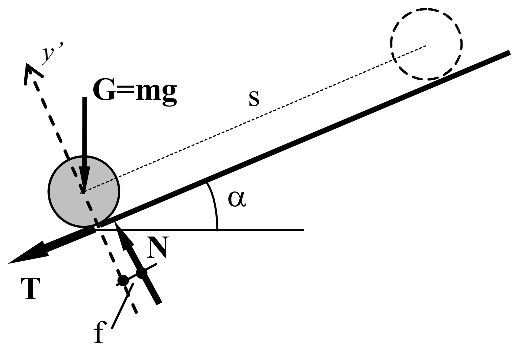
$$E_{mI} = E_{kI} = ½\, mv_I^2 + ¼\, mv_I^2 .$$

W położeniu końcowym, gdy walec zatrzyma się na wysokości h, jego energia mechaniczna wynosić będzie

$$E_{mII} = E_{pII} + E_{kII} = mgh ,$$

gdyż $E_{pII} = mgh$ i $E_{kII} = 0$, bo $v_{II} = 0$.

Obliczmy pracę wykonaną na drodze I-II przez siły pola niezachowawczego.



Siły N i T mają stałą wartość. Praca będzie sumą pracy wykonanej na przesunięciu oznaczonym jako s jedynie przez siłę T (praca siły N będzie zerowa, ponieważ wektor siły jest stale prostopadły do wektora przesunięcia) oraz na obrocie φ przez moment sił T i N względem środka walca:

$$W_{I\text{-}II} = -\,Ts\ + (Tr - Nf)\,\varphi.$$

Po uwzględnieniu zależności $\varphi = s/r$ daje to

$$W_{I\text{-}II} = -\,Nfs/r.$$

Wartość siły nacisku N obliczymy z równania ruchu w kierunku osi y'

$$m\, a_{y'} = N - mg\cos\alpha ,$$

z którego wynika, że $N = mg\cos\alpha$ ponieważ $a_{y'}= 0$.

Zasada zachowania energii $E_{mII} = E_{mI} + W_{I\text{-}II}$ dla rozpatrywanego zadania przyjmuje postać

$$mgh = ¾\, mv_I^2 - (m\, g\, f\, h\, \mathrm{ctg}\alpha)/r .$$

Z tego równania można wyznaczyć wysokość, jaką osiągnie walec

$$h = \frac{3}{4}\frac{v_I^2}{g\left(1 + \frac{f}{r}\,ctg\,\alpha\right)} .$$

Warto zauważyć, że wysokość ta nie zależy od masy walca a jedynie od jego promienia.