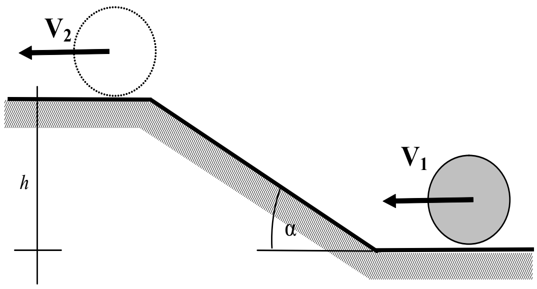
Przykład 6.4. Wyznaczanie prędkości



Walec o masie M i promieniu R rozpoczyna ruch z prędkością środka równą v_1. Współczynnik tarcia potoczystego f=0. Współczynnik tarcia posuwistego μ jest wystarczający dla toczenia bez poślizgu.

Jaką prędkość będzie miał środek walca, gdy wtoczy się na równię na wysokość h.

Rozwiązanie

Do wyznaczenia prędkości środka walca na górnym poziomie wykorzystamy zasadę zachowania energii bryły sztywnej.

Energia mechaniczna określona jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej i jej przyrost podczas ruchu równy jest sumie prac wykonanych w tym czasie przez siły działające na bryłę

$$E_m = E_p + E_k \,,\ \Delta E_m = W \,.$$

Jako poziom odniesienia przyjmiemy poziom środka walca u podstawy równi. Przyjmijmy, że w tym położeniu energia potencjalna walca jest równa zeru, a energia kinetyczna wynosi

$$E_{kI} = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + \tfrac{1}{2} J\omega_1^2 \,.$$

Jest ona sumą energii ruchu postępowego bryły z prędkością środka masy v_1 i ruchu obrotowego wokół środka masy z prędkością kątową ω_1. Prędkość ω_1 w chwili początkowej wynosi $\omega_1 = v_1/r$, gdyż chwilowy środek obrotu walca znajduje się w punkcie styczności z podłożem.
Moment bezwładności walca o masie m i promieniu r względem jego osi wynosi $J = \tfrac{1}{2} mr^2$.
W położeniu początkowym całkowita energia mechaniczna układu wynosi zatem

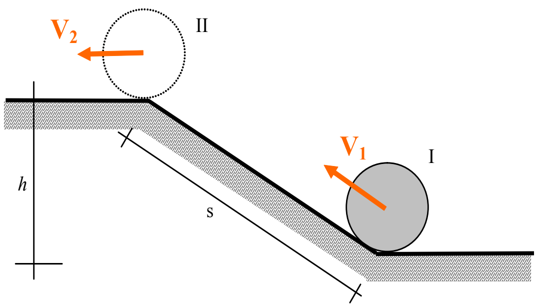
$$E_{mI} = E_{kI} = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + \tfrac{1}{4} m v_1^2 \,.$$

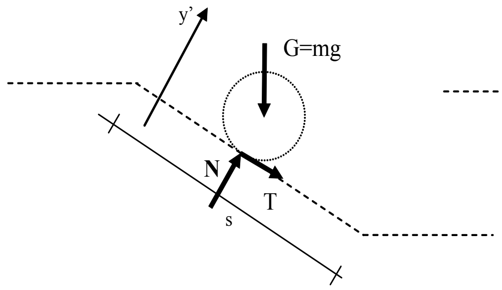
W położeniu końcowym, gdy walec znajdzie się na wysokości h, jego energia mechaniczna będzie równa

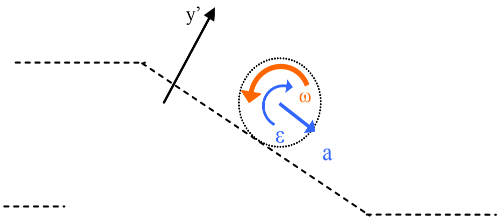
$$E_{mII} = E_{pII} + E_{kII} = mgh + \tfrac{1}{2} m v^2{}_2 + \tfrac{1}{4} m v_2^2 \,.$$

Obliczmy pracę wykonaną na drodze I-II przez siły pola niezachowawczego.

Niech s oznacza drogę wzdłuż równi, jaką przebył środek walca: s=h/sinα. W tym czasie walec wykonał obrót o kat $\varphi = s/R$.







Siły N i T mają stałą wartość. Praca jest sumą pracy wykonanej na przesunięciu oznaczonym jako s jedynie przez siłę T (praca siły N będzie zerowa, ponieważ wektor siły jest stale prostopadły do wektora przesunięcia) oraz na obrocie φ przez moment siły T względem środka walca

$$W_{I\text{-}II} = -\,Ts + Tr\,\varphi\,.$$

Po uwzględnieniu zależności $\varphi = s/r$ dostajemy

$$W_{I\text{-}II} = 0.$$

Zasada zachowania energii $E_{mII} = E_{mI} + W_{I\text{-}II}$ dla rozpatrywanego zadania przyjmuje postać

$$mgh + \tfrac{3}{4}\,mv_2^2 = \tfrac{3}{4}\,mv_1^2\,,$$

co pozwala wyznaczyć poszukiwaną prędkość v_2, jaką będzie miał środek walca po pokonaniu równi

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{4}{3}gh}$$