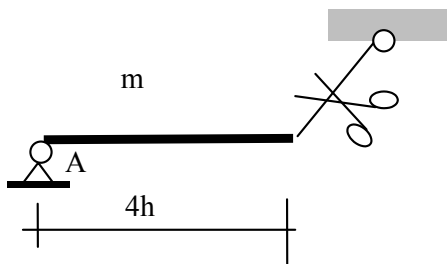


## Przykład 6.5. Wyznaczanie reakcji dynamicznych belki

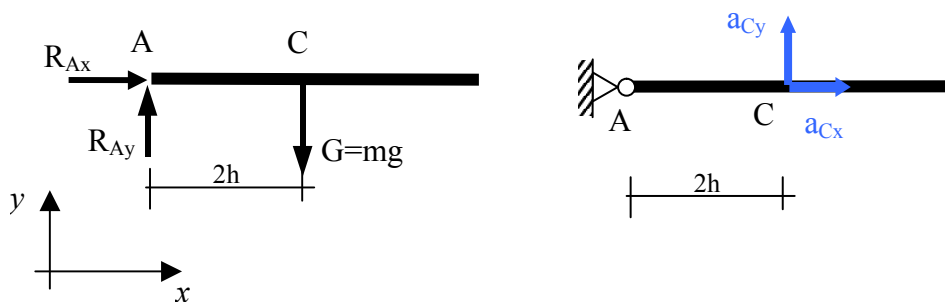


Ruch belki rozpoczyna się bez prędkości początkowej z położenia jak na rysunku. Masa belki wynosi  $m$ .

Określić reakcje w podporze nieprzesuwnej A w chwili bezpośrednio po odcięciu cięgna.

### Rozwiązanie

Po uwolnieniu z więzów na belkę działa następujący układ sił



Do wyznaczenia reakcji wykorzystamy równania dynamiczne ruchu płaskiego bryły sztywnej.

W zapisie wektorowym równanie ruchu środka masy ma postać:

$$m\bar{a}_C = \bar{G} + \bar{R}_A,$$

i jest równoważne dwóm równaniom algebraicznym

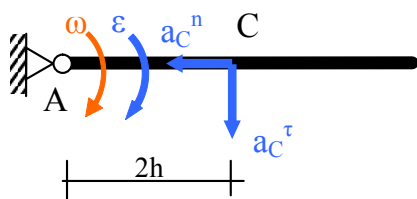
$$\begin{cases} m a_{Cx} = R_{Ax} \\ m a_{Cy} = R_{Ay} - G \end{cases} \quad (1)$$

Równanie ruchu obrotowego względem punktu C – środka masy ma postać

$$J_{zC} \varepsilon = R_{Ay} 2h. \quad (2)$$

$J_{zC}$  oznacza moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez środek masy C i wynosi  $J_{zC} = 1/12 m(4h)^2 = 4/3 mh^2$ .

Po odcięciu cięgna belka zaczyna poruszać się bez prędkości początkowej ruchem obrotowym wokół stałego środka obrotu – podpory A. Ruch obrotowy jest szczególnym przypadkiem ruchu płaskiego. Składowe przyspieszenia punktu C przedstawione są jako składowe: dośrodkowa i styczna (rysunek poniżej).



W chwili początkowej wynoszą one:

$$a_C^n = 0, \quad (\text{ponieważ } \omega = 0)$$

$$a_C^\tau = \varepsilon \cdot 2h.$$

Składowe  $a_{Cx}$  i  $a_{Cy}$  występujące w równaniach ruchu (1) wynoszą zatem

$$a_{Cx} = -a_C^n = 0$$

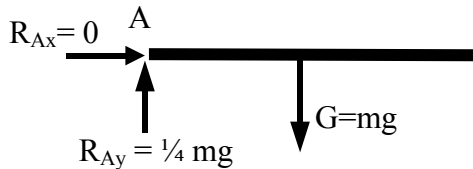
$$a_{Cy} = -a_C^\tau = -2\varepsilon h$$

Podstawiając wartość momentu bezwładności  $J_{zc}$  i wykorzystując układ równań (1) otrzymujemy:

$$\begin{cases} 0 = R_{Ax} \\ -2mh \varepsilon = R_{Ay} - mg \\ 4/3 mh^2 \varepsilon = R_{Ay} \cdot 2h \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu są reakcje  $R_{Ax} = 0$ ,  $R_{Ay} = \frac{1}{4} mg$ .

Rzeczywiste zwroty reakcji i ich wartości przedstawione są na rysunku poniżej.



*Uwaga*

Zadanie to można również rozwiązać wykorzystując równanie ruchu obrotowego względem stałego środka – podpory A. Ma ono postać

$$J_{zA} \varepsilon = mg \cdot 2h \quad (2^*)$$

gdzie  $J_{zA}$  oznacza moment bezwładności belki względem osi  $z$  prostopadłej do płaszczyzny ruchu w punkcie A. Jego wartość można obliczyć wykorzystując twierdzenie Steinera o zmianie momentu bezwładności przy przesunięciu osi z środka masy:  $J_{zA} = J_{zc} + m(2h)^2$ . Ostatecznie

$$J_{zA} = 16/12mh^2 + 4mh^2 = 16/3 mh^2.$$

Przyspieszenie kątowe wyznaczone z równania (2\*) wynosi

$$\varepsilon = mg \cdot 2h / J_{zA} = 3g/8h.$$

Składowe reakcji w podporze A wyznaczone z układu równań (1) wynoszą

$$R_{Ax} = -m a_C^n = 0$$

$$R_{Ay} = -m a_C^\tau + mg = -3/4mg + mg = \frac{1}{4} mg.$$

Rozwiązanie jest, oczywiście, identyczne z otrzymanym poprzednio.