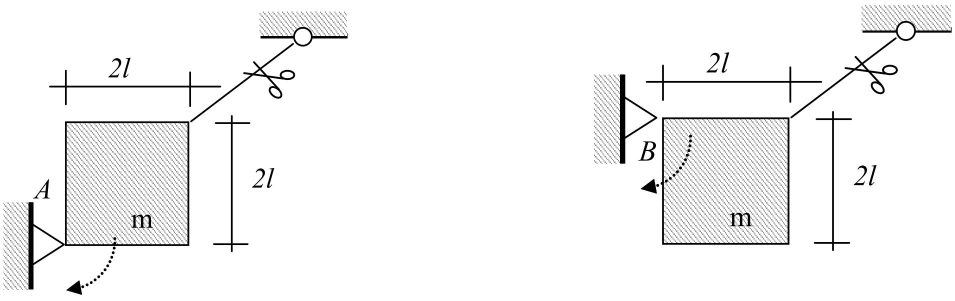
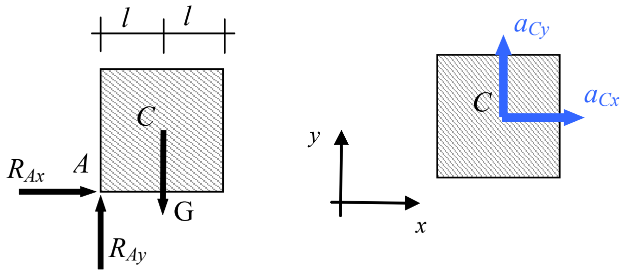
Przykład 6.6. Wyznaczanie reakcji dynamicznych



Ruch rozpoczyna się bez prędkości początkowej z położenia jak na rysunku. Masa tarczy wynosi m.
Określić reakcje w podporze A po odcięciu cięgna. Jak zmienią się reakcje w podporze A po zmianie punktu podparcia.

Rozwiązanie

<u>I przypadek podparcia</u>
Układ sił po odcięciu cięgna i uwolnieniu z więzów przedstawia poniższy rysunek



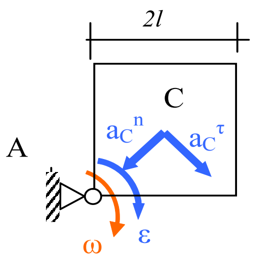
Tarcza porusza się ruchem płaskim. Do wyznaczenia reakcji wykorzystamy równanie ruchu środka masy tarczy oznaczonego jako punkt C oraz równanie ruchu obrotowego wokół środka masy. W zapisie wektorowym równanie ruchu punktu C ma postać:

$$m\bar{a}_C = \bar{G} + \bar{R}_{Ax} + \bar{R}_{Ay},$$

i jest równoważne dwóm równaniom algebraicznym określającym poszukiwane reakcje jako

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= ma_{Cx} \\ R_{Ay} &= ma_{Cy} + G \end{aligned} \tag{1}$$

Po odcięciu cięgna tarcza zaczyna poruszać się bez prędkości początkowej ruchem obrotowym względem stałego środka obrotu – podpory A. Składowe przyśpieszenia punktu C przedstawione są jako składowe: dośrodkowa i styczna (rysunek poniżej).
W chwili początkowej wynoszą one:



$$\begin{cases} a_C^n = 0 \\ a_C^\tau = \varepsilon\sqrt{2}l \end{cases}$$

Składowe a_{Cx} i a_{Cy} występujące w równaniach ruchu (1) wynoszą zatem

$$a_{Cx} = a_C^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2}} - a_C^{n}\frac{1}{\sqrt{2}} = \varepsilon l$$

$$a_{Cy} = -a_C^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2}} - a_C^{n}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\varepsilon l$$

Równanie ruchu obrotowego względem podpory ma postać

$$J_{zA}\,\varepsilon = mg\,l \qquad (2)$$

gdzie J_{zA} oznacza moment bezwładności tarczy kwadratowej względem osi *z* prostopadłej do płaszczyzny ruchu w punkcie A. Jego wartość można obliczyć wykorzystując twierdzenie Steinera o zmianie momentu bezwładności przy przesunięciu osi z środka masy. Zatem

$$J_{zA} = J_{zC} + m\left(l\sqrt{2}\right)^2,$$

gdzie J_{zC} oznacza moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy C i wynosi $J_{zC} = \frac{1}{6}m(2l)^2$. Ostatecznie

$$J_{zA} = \frac{2}{3}ml^2 + m\left(l\sqrt{2}\right)^2 = \frac{8}{3}ml^2 .$$

Przyśpieszenie kątowe wyznaczone z równania (2) wynosi

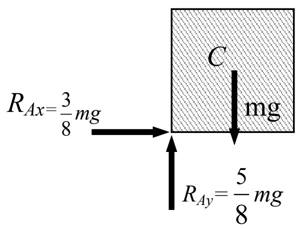
$$\varepsilon = \frac{mgl}{J_{zA}} = \frac{3g}{8l} .$$

Składowe reakcji w podporze A wyznaczone z układu równań (1) wynoszą

$$R_{Ax} = ma_{Cx} = m\varepsilon l = \frac{3}{8}mg$$

$$R_{Ay} = ma_{Cy} + G = -m\varepsilon l + mg = \frac{5}{8}mg$$

Rzeczywiste zwroty reakcji i ich wartości przedstawione są na rysunku poniżej.



Uwaga

Wykorzystując do rozwiązania zadania, zamiast równania (2), równanie ruchu obrotowego wokół środka masy:

$$J_{zC}\,\varepsilon = R_{Ay}\,l - R_{Ax}l \quad . \qquad (2^*)$$

otrzymujemy wraz z równaniami (1) układ równań :

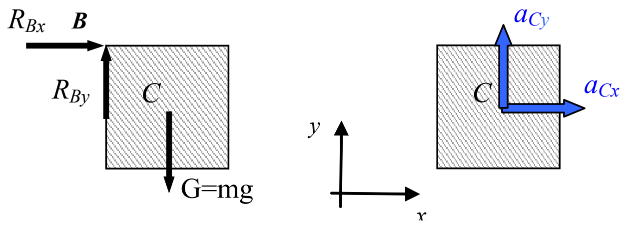
$$\begin{cases} 2/3\, ml^2\,\varepsilon = R_{Ay}l - R_{Ax}l \\ R_{Ax} = m\varepsilon l \\ R_{Ay} = -\,m\varepsilon l + mg \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu są, jak poprzednio, reakcje

$$R_{Ax} = \frac{3}{8}mg \qquad R_{Ay} = \frac{5}{8}mg \; .$$

<u>II przypadek podparcia</u>

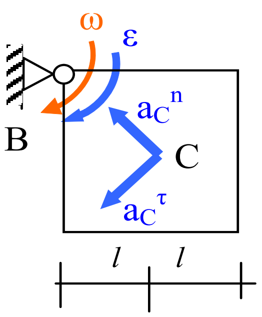
Układ sił po odcięciu cięgna i uwolnieniu z więzów przedstawia poniższy rysunek



Do wyznaczenia reakcji wykorzystamy równanie ruchu środka masy tarczy - punktu C, które jak poprzednio ma postać dwóch równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} ma_{Cx} &= R_{Bx} \\ ma_{Cy} &= R_{By} - G \end{aligned} \tag{1}$$

Po odcięciu cięgna tarcza porusza się ruchem obrotowym względem stałego środka obrotu – podpory B. Składowe przyśpieszenia punktu C przedstawione są jako składowe: dośrodkowa i styczna (rysunek poniżej). W chwili początkowej wynoszą one:



$$\begin{cases} a_C^n = 0 \\ a_C^\tau = \varepsilon\sqrt{2}l \end{cases}$$

Składowe a_{Cx} i a_{Cy} występujące w równaniach ruchu (1) obliczone analogicznie jak poprzednio wynoszą

$$a_{Cx} = -a_C^\tau \frac{1}{\sqrt{2}} - a_C^n \frac{1}{\sqrt{2}} = -\varepsilon l$$

$$a_{Cy} = -a_C^\tau \frac{1}{\sqrt{2}} + a_C^n \frac{1}{\sqrt{2}} = -\varepsilon l$$

Równanie ruchu obrotowego względem podpory ma postać

$$J_{zB}\,\varepsilon = mg\,l \tag{2}$$

gdzie J_{zB} oznacza moment bezwładności tarczy kwadratowej względem osi *z* prostopadłej do płaszczyzny ruchu w punkcie B. Jego wartość obliczymy jako

$$J_{zB} = J_{zC} + m\left(l\sqrt{2}\right)^2,$$

gdzie J_{zC} oznacza moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy C i wynosi $J_{zC} = \frac{1}{6}m(2l)^2$. Ostatecznie

$$J_{zA} = \frac{2}{3} ml^2 + m\left(l\sqrt{2}\right)^2 = \frac{8}{3} ml^2 .$$

Przyśpieszenie kątowe wyznaczone z równania (2) wynosi

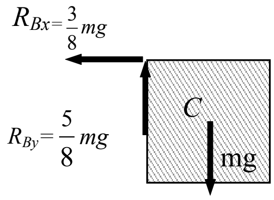
$$\varepsilon = \frac{mgl}{J_{zA}} = \frac{3g}{8l} .$$

Składowe reakcji w podporze B wyznaczone z układu równań (1) wynoszą

$$R_{Bx} = ma_{Cx} = -m\varepsilon l = -\frac{3}{8} mg$$

$$R_{By} = ma_{Cy} + G = -m\varepsilon l + mg = \frac{5}{8} mg$$

Rzeczywiste zwroty reakcji i ich wartości przedstawione są na rysunku poniżej.



Wniosek

Zmiana położenia punktu podparcia tarczy spowodowała zmianę zwrotu składowej poziomej reakcji.