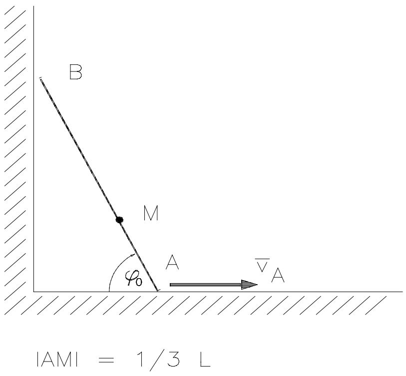
Przykład 1.1. Wyznaczanie równań ruchu, prędkości, przyśpieszenia oraz toru punktu



rys. 1. A

Pręt AB o długości *3l* pokazany na rysunku 1.A porusza się w ten sposób, że koniec B przesuwa się wzdłuż prostej pionowej, a koniec A wzdłuż prostej poziomej. Prędkość punktu A jest stała i równa V_O.

Po jakim torze porusza się punkt M pręta ? Jaka jest jego prędkość i przyśpieszenie ? Położenie początkowe przedstawiono na rysunku 1.A.

ROZWIĄZANIE

1. Wyznaczenie równań ruchu i toru punktu M

Przyjmując układ osi *xy* jak na rysunku 1.B, możemy określić odległość punktu A od początku układu jako:

$$|\mathrm{OA}| = |\mathrm{AB}| \cos\varphi(t) \;\; = 3l\cos\varphi(t) \;.$$

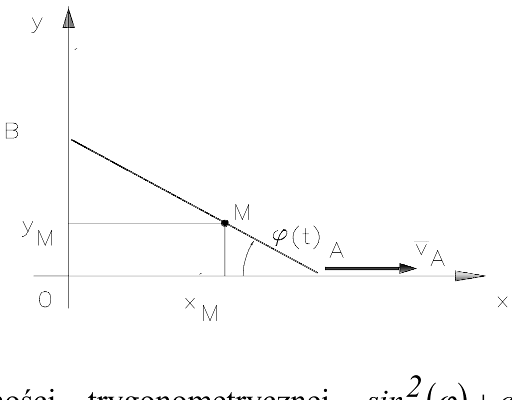
Współrzędna x_M w dowolnej chwili wynosi:

$$x_M = |OA| - |AM|\cos\varphi(t) = 3l\cos\varphi(t) - l\cos\varphi(t) = 2l\cos\varphi(t),$$

natomiast współrzędna y_M (wyznaczona analogicznie jak x_M) wynosi

$$y_M = |AM|\sin\varphi(t) = l\sin\varphi(t).$$

Równania $x_{M.}$ i $y_{M.}$ stanowią równania ruchu punktu M.



rys. 1. B

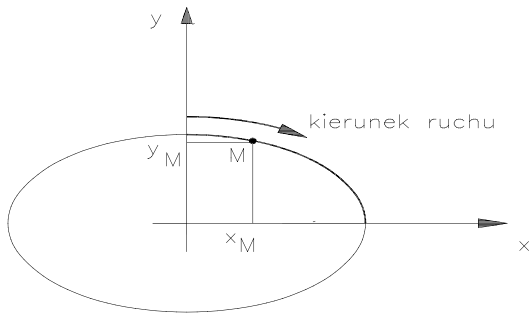
Korzystając z zależności trygonometrycznej $sin^2(\varphi) + cos^2(\varphi) = 1$, możemy $\varphi(t)$ wyrugować z równań i otrzymać równanie toru.

Przekształćmy równania określające współrzędne punktu M w następujący sposób:

$$\frac{x_M}{2l} = \cos\varphi(t)\ , \quad \frac{y_M}{l} = \sin\varphi(t)\,.$$

Podnosząc równania stronami do kwadratu i dodając do siebie otrzymamy

$$\left(\frac{x_M}{2l}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{l}\right)^2 = 1\,.$$



rys. 1.C

Torem punktu M jest zatem wycinek elipsy o półosiach równych $2l$ i l. Jeżeli założymy, że w chwili początkowej pręt AB znajdował się w pozycji pionowej, a w chwili końcowej w pozycji poziomej, to punkt M porusza się po wycinku elipsy leżącym w dodatniej ćwiartce układu współrzędnych. Promień wodzący punktu M obraca się zgodnie ze wskazówkami zegara, a punkt M rozpoczyna swój ruch z położenia określonego współrzędnymi $\left(2l\cos\varphi_o\ ,\ l\sin\varphi_o\right)$ co przestawia rys. 1.C.

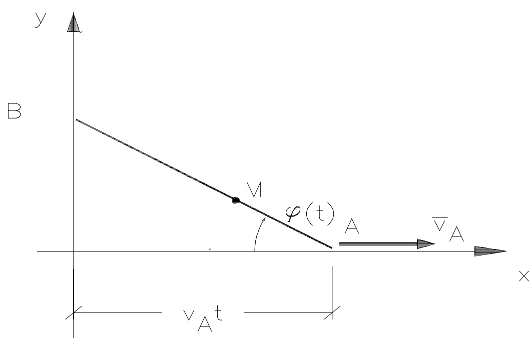
2. Wyznaczenie prędkości punktu M

Otrzymane równania ruchu punktu M przedstawione są w funkcji kąta φ(t). Oznacza to, że obliczenie składowych wektora prędkości z równań:

$$V_{Mx} = \frac{dx_M(\varphi)}{dt} = \frac{dx_M(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi(t)}{dt},$$

$$V_{My} = \frac{dy_M(\varphi)}{dt} = \frac{dy_M(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi(t)}{dt},$$

wymaga znalezienia $\dot{\varphi}(t)$.



rys. 1.D

Rozważmy ponownie odległość OA określoną przez kąt φ związkiem

$|OA| = 3l\cos\varphi(t)$.

Jednocześnie (porównaj rysunek 1.D) równanie ruchu punktu A ma postać

$$x_A = |OA| = V_A \cdot t\,.$$

Z porównania obydwu zapisów odcinka $|\bar{O}A|$ uzyskujemy $\cos\varphi(t) = \frac{V_A}{3l}\cdot t$,

i po zróżniczkowaniu po czasie , możemy obliczyć, że

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{V_A}{3l\sin\varphi(t)},$$

ponieważ $\frac{d}{dt}(\cos\varphi(t)) = -\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) = \frac{V_A}{3l}$.

Teraz możemy już obliczyć składowe wektora prędkości punktu M

$$V_{Mx} = \frac{d}{dt}\left[2l\cos\varphi(t)\right] = \frac{2}{3}V_A$$

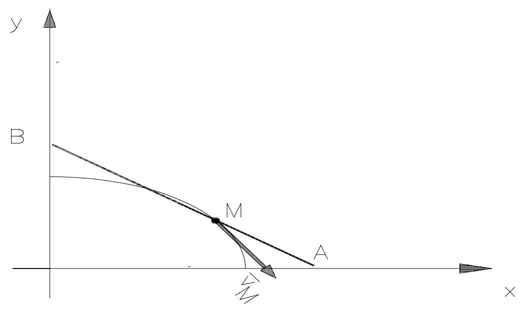
$$V_{My} = \frac{d}{dt}\left[l\sin\varphi(t)\right] = l\cos\varphi(t)\dot{\varphi}(t) = -\frac{1}{3}V_A \,\mathrm{ctg}\varphi(t).$$

Długość wektora prędkości wynosi:

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}V_A\right)^2 + \left[\frac{1}{3}V_A ctg\varphi(t)\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{3}V_A\sqrt{4 + ctg^2\varphi(t)}$$

Wektor prędkości punktu M przedstawia rysunek 1.E.



rys. 1.E

3. Wyznaczenie przyśpieszenia punktu M

Podobnie jak przy wyznaczeniu prędkości, składowe wektora przyśpieszenia możemy określić z zależności różniczkowych

$$a_{Mx} = \frac{dV_{Mx}(\varphi)}{dt} = \frac{dV_{Mx}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

$$a_{My} = \frac{dV_{My}(\varphi)}{dt} = \frac{dV_{My}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Dla punktu M uzyskujemy:

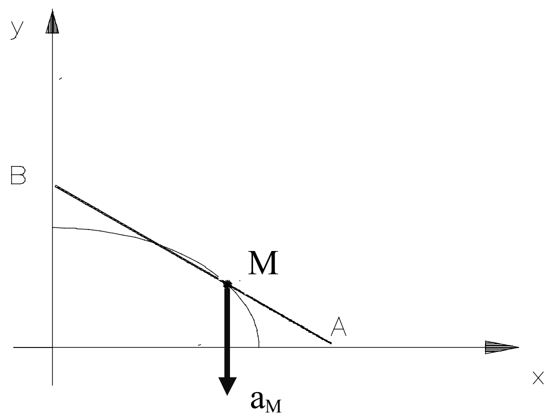
$$a_{Mx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}V_A\right) = 0,$$

$$a_{My} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}V_A \operatorname{ctg}\varphi(t)\right) = -\frac{V_A^2}{9l\sin^3\varphi(t)}.$$

Stąd dwa wnioski:

- wektor przyśpieszenia punktu M ma stały kierunek, prostopadły do osi x,
- długość wektora przyśpieszenia wynosi: $a_M = \left|a_{My}\right| = \dfrac{V_A^2}{9l\sin^3\varphi(t)}.$

Ilustrację tych wniosków przedstawia rysunek 1.F.



rys. 1.F