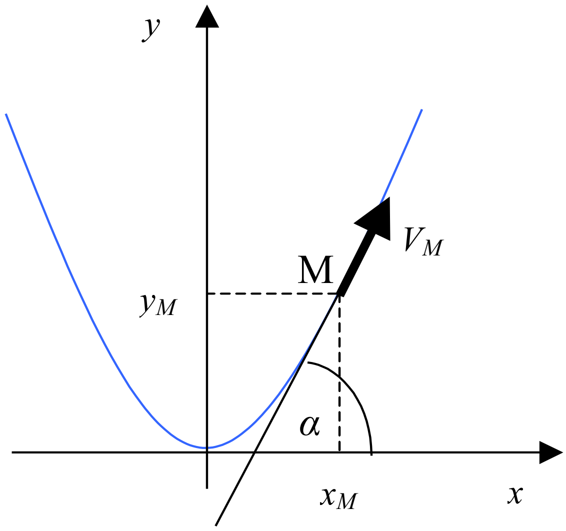
Przykład 1.2. Wyznaczanie przyśpieszenia punktu

Punkt M porusza się po torze parabolicznym o równaniu $y = kx^2$ ze stałą prędkością V_o. Znaleźć przyśpieszenie tego punktu w funkcji jego położenia.

ROZWIĄZANIE

Zilustrujmy treść zadania na rysunku 2.A.



rys 2.A

Wektor prędkości punktu jest w każdej chwili styczny do toru. Znając równanie trajektorii można więc określić kierunek stycznej do paraboli i tym samym kierunek wektora $\overline{V}_M$. Oznaczając jako α kąt nachylenia stycznej do toru (rys. 2.A) mamy

$$tg\alpha = \frac{d}{dx}\big(y(x)\big) = 2kx .$$

Przez kąt α można wyrazić składowe wektora prędkości punktu M jako

$$V_{Mx} = V_M \cos\alpha$$
$$V_{My} = V_M \sin\alpha$$

Wykorzystując zależności trygonometryczne

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \ , \quad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} ,$$

otrzymujemy

$$V_{Mx} = V_o \frac{1}{\sqrt{1+4k^2x^2}} \ , \qquad V_{My} = V_o \frac{2k\cdot x}{\sqrt{1+4k^2x^2}} .$$

Wyznaczone składowe wektora prędkości pozwalają określić składowe wektora przyśpieszenia. Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonej otrzymujemy

$$a_{Mx} = \frac{d}{dt}\left(V_{Mx}\right) = \frac{dV_{Mx}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dV_{Mx}}{dx}\cdot V_{Mx} =$$

$$= -V_o \frac{8k^2 x}{2\sqrt{\left(1+4k^2x^2\right)^3}}\cdot\frac{V_o}{\sqrt{1+4k^2x^2}} = -V_o^2 \frac{4k^2 x}{\left(1+4k^2x^2\right)^2},$$

$$a_{My} = \frac{d}{dt}\left(V_{My}\right) = \frac{dV_{My}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dV_{My}}{dx}\cdot V_{My} = V_o^2 \frac{2k}{\left(1+4k^2x^2\right)^2}$$

Określenie długości wektora przyśpieszenia punktu M sprowadza się teraz do obliczenia sumy geometrycznej składowych a_{Mx}, a_{My}

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = V_o^2 \frac{2k}{\sqrt{\left(1+4k^2x^2\right)^3}}.$$

Kąt β nachylenia wektora przyśpieszenia do osi x określony jest związkiem

$$tg\beta = \frac{a_{Mx}}{a_{My}} = -\frac{1}{2kx}.$$

Ponieważ $tg\beta = -\frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Oznacza to, że wektor przyśpieszenia jest prostopadły do wektora prędkości.

Kierunek wektora przyśpieszenia można określić także w inny sposób. Całkowite przyśpieszenie punktu poruszającego się ze stałą co wartości prędkością jest równe przyśpieszeniu normalnemu, czyli jest skierowane prostopadle do kierunku ruchu.