**Przykład 1.3. Wyznaczanie toru punktu, jego prędkości i przyśpieszenia oraz promienia krzywizny toru – współrzędne biegunowe.**

Punkt na płaszczyźnie porusza się tak, że jego równania ruchu we współrzędnych biegunowych (gdzie $k$ i $\omega$ są stałymi dodatnimi) są postaci:

$$\begin{cases} r(t) = k\, e^{\omega t} \\ \varphi(t) = \omega t \end{cases}$$

Wyznaczyć tor punktu, jego prędkość i przyśpieszenie oraz promień krzywizny toru.

ROZWIĄZANIE

**1. Wyznaczenie toru punktu**

Równanie toru uzyskamy rugując z równań ruchu parametr czasu. W tym celu wystarczy podstawić $\omega\, t = \varphi(t)$ do równania $r(t)$. Otrzymamy wtedy

$$r = k\, e^{\varphi}\ .$$

Zatem torem punktu jest spirala logarytmiczna.

**2. Wyznaczenie prędkości punktu**

Obliczamy składowe: promieniową i obwodową prędkości punktu, które określone są związkami:

$$V_r = \frac{dr(t)}{dt} = k\,\omega\, e^{\omega t}$$

$$V_\varphi = r\frac{d\varphi(t)}{dt} = r\,\omega = k\omega\ e^{\omega t}$$

Prędkość całkowita punktu wynosi zatem

$$V(t) = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{2}\, k\omega\ e^{\omega t} = \sqrt{2}\,\omega\ r(t)\ .$$

**3. Wyznaczenie przyśpieszenia punktu**

Składowe: promieniowa i obwodowa przyśpieszenia wyrażają się związkami:

$$a_r = \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2$$

$$a_\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

Obliczając potrzebne pochodne

$$\frac{dr(t)}{dt} = k\,\omega\, e^{\omega t}$$

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = k\,\omega^2 e^{\omega t}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(k^2 \omega e^{2\omega t}\right) = 2k^2 \omega^2 e^{2\omega t}$$

i podstawiając do związków określających $a_r$ , $a_\varphi$ mamy:

$$a_r = 0$$

$$a_\varphi = 2k\omega^2 e^{\omega t}$$

Z powyższego wynika, że wektor przyśpieszenia punktu jest prostopadły do promienia wodzącego, a jego długość wynosi

$$a = a_\varphi = 2k\omega^2 e^{\omega t} = 2\omega^2 r(t).$$

**4. Wyznaczenie promienia krzywizny toru**

Promień krzywizny ρ związany jest ze składową normalną przyśpieszenia zależnością:

$a^n = \frac{V^2}{\rho}$ , która pozwoli nam obliczyć jego długość.

Obliczmy składową $a^n$ poprzez rozkład przyśpieszenia na kierunki styczny i normalny:

$$a^2 = \left(a^n\right)^2 + \left(a^\tau\right)^2 .$$

Mamy stąd $a^n = \sqrt{a^2 - \left(a^\tau\right)^2}$ .

Składową styczną przyśpieszenia możemy obliczyć jako $a^\tau = \frac{dV}{dt}$

uzyskując $a^\tau = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\omega r(t)\right) = \sqrt{2}k\omega^2 e^{\omega t}$ .

Wartość składowej $a^n$ wynosi więc

$$a^n = \sqrt{\left(2k\omega^2 e^{\omega t}\right)^2 - \left(\sqrt{2}k\omega^2 e^{\omega t}\right)^2} = \sqrt{2}\,k\omega^2 e^{\omega t} ,$$

a szukany promień krzywizny ρ wynosi

$$\rho = \frac{\left(\sqrt{2}\,k\omega e^{\omega t}\right)^2}{\sqrt{2}k\omega^2 e^{\omega t}} = \sqrt{2}\,ke^{\omega t} = \sqrt{2}\,r(t).$$