Przykład 1.4. Wyznaczanie toru prędkości i przyśpieszenia punktu

Dane są równania ruchu punktu (*k, r* są stałymi dodatnimi) postaci:

$$\begin{cases} x(t) = r\,sin^2\,kt \\ y(t) = r\,cos\,kt \\ z(t) = {}^1\!/_2\, r\,sin\,2kt \end{cases}$$

Znaleźć tor, prędkość i przyśpieszenie punktu.

ROZWIĄZANIE

1. Wyznaczenie toru punktu

Dążymy do przedstawienia toru punktu jako krzywej przestrzennej będącej przecięciem dwóch powierzchni (to znaczy w postaci uwikłanej).

Wykorzystując dwa pierwsze równania ruchu, można stwierdzić, że powierzchnia, po której porusza się punkt opisana jest równaniem

$$\frac{x}{r} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad .$$

Jest to powierzchnia walca parabolicznego o tworzących równoległych do osi z. Rozważając teraz pierwsze i trzecie równanie ruchu możemy stwierdzić, że

$$z^2 = \left(r\,sin\,kt\,cos\,kt\right)^2 = r^2\left(1 - sin^2\,kt\right)sin^2\,kt \quad = \quad r^2\left(1 - \frac{x}{r}\right)\frac{x}{r} \,.$$

Zatem równanie powierzchni zawierającej tor punktu ma postać

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \,.$$

Równanie to opisuje powierzchnię walca kołowego o tworzących równo-ległych do osi y. Torem punktu jest krzywa przestrzenna będąca linią prze-cięcia obu walców.

2. Wyznaczenie prędkości punktu

Różniczkując względem czasu składowe położenia punktu obli-czamy składowe wektora prędkości. Wynoszą one $V_x = \dot{x} = 2\,r\,k\,sin\,kt\,cos\,kt = r\,k\,sin\,2kt$,

$$V_y = \dot{y} = -r\,k\,sin\,kt\,,$$

$$V_z = \dot{z} = r\,k\,cos\,kt\,.$$

Długość wektora prędkości wynosi

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = r\,k\,\sqrt{1 + sin^2\,kt} \quad ,$$

natomiast jego cosinusy kierunkowe dane są związkami

$$cos\left(\langle\ \overline{V},\overline{V}_x\right) = \frac{V_x}{V}\ \ ,\ cos\left(\langle\ \overline{V},\overline{V}_y\right) = \frac{V_y}{V}\ \ ,\ cos\left(\langle\ \overline{V},\overline{V}_z\right) = \frac{V_z}{V}\ .$$

3. Wyznaczenie przyśpieszenia punktu

Składowe wektora przyśpieszenia wynoszą:

$$a_x = \dot{V}_x = 2\,k^2\,r\,cos\,2kt$$

$$a_y = \dot{V}_y = -\,k^2\,r\,cos\,kt$$

$$a_z = \dot{V}_z = -2\,k^2\,r\,sin\,2kt\ \ ,$$

natomiast jego długość

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = k^2 r\sqrt{4 + \cos^2 kt}\ .$$

Obliczmy ponadto składowe przyśpieszenia w układzie naturalnym - czyli składowe styczną i normalną do toru.

Składowa styczna (obliczona z definicji) wynosi

$$a^{\tau} = \frac{dV}{dt} = k\,r\frac{2k\,sin\,kt\,cos\,kt}{2\sqrt{1+sin^2\,kt}} = \frac{1}{2}k^2 r\frac{sin\,2kt}{\sqrt{1+sin^2\,kt}}\ .$$

Obliczenie składowej normalnej bezpośrednio z definicji wymaga określe-nia promienia krzywizny toru. Prościej więc będzie wykorzystać prostopa-dłość składowych stycznej i normalnej i obliczyć składową normalną jako

$$a^n = \sqrt{a^2 - \left(a^{\tau}\right)^2} = r\,k^2\sqrt{\frac{5+3\,sin^2\,kt}{1+sin^2\,kt}}$$