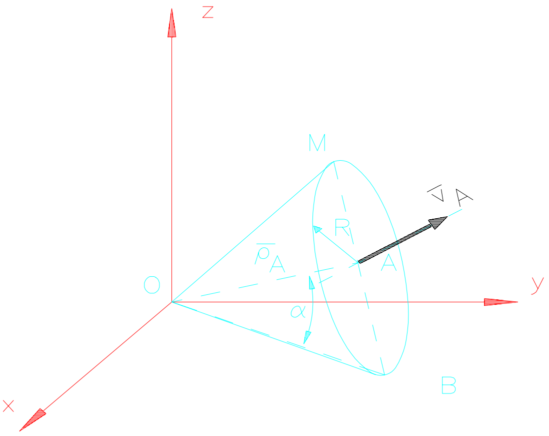
Przykład 2.1. Wyznaczanie prędkości i przyśpieszenia w ruchu bryły

Stożek o kącie rozwarcia tworzących 2α i podstawie, której promień wynosi R toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie. Wektor prędkości środka podstawy A ma stałą długość równą V_O. Znaleźć wektory prędkości i przyśpieszenia kątowego oraz wektory prędkości i przyśpieszenia najwyższego punktu podstawy stożka.

ROZWIĄZANIE

Sformułowany opisowo problem przedstawimy graficznie na rysunku 1.A. Ruch stożka jest ruchem kulistym względem punktu O.

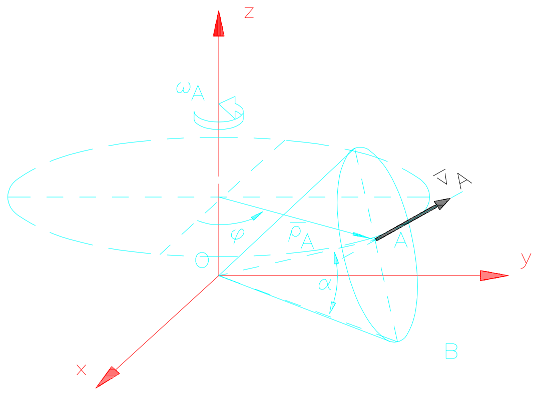
Ponieważ ruch bryły jest opisany poprzez ruch punktu - środka podstawy, wykorzystując twierdzenia o ruchu punktu określimy jego równanie ruchu oraz prędkość i przyśpieszenie.



rys. 1. A

1. Określenie ruchu punktu A

Zgodnie z geometrią zadania tor środka podstawy A jest okręgiem (przedstawionym na rysunku 1.B).



rys. 1. B

Promień tego okręgu wynosi $\left|\overline{\rho}_A\right| = \dfrac{R\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$. Prędkość kątowa w ruchu po tym okręgu wynosi

$$\omega_A = \frac{|\bar{V}_A|}{|\bar{\rho}_A|} = \frac{V_o \sin\alpha}{R\cos^2\alpha} \ .$$

Położenie punktu A na torze może być określone przez kąt φ (przedstawiony na rysunku), który w położeniu początkowym równy jest zero. Wynika stąd, że kąt φ jest liniową funkcją czasu: $\varphi = \omega_A t = \dfrac{V_o \sin\alpha}{R\cos^2\alpha} t$, a droga jaką przebywa punkt A wyraża się związkiem $s = \varphi \cdot \rho_A = V_o t$.

Wektor prędkości punktu A ma w układzie współrzędnych O*xyz* składowe:

$$V_{Ax} = -V_o \sin\varphi,$$
$$V_{Ay} = V_o \cos\varphi,$$
$$V_{Az} = 0.$$

Przyśpieszenie styczne punktu A jest równe zero.

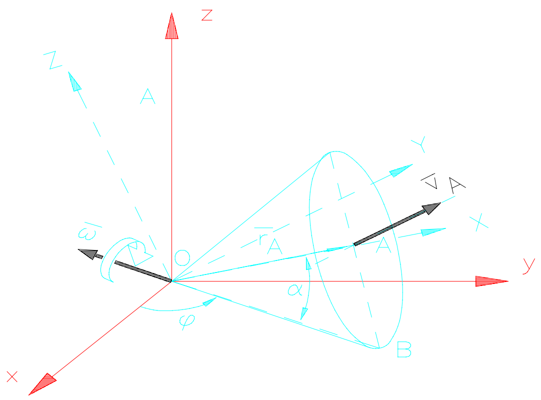
Przyśpieszenie normalne ma wartość $\quad a_A^n = \dfrac{|\bar{V}_A|^2}{\rho_A} = \dfrac{V_o^2 \sin\alpha}{R\cos^2\alpha}$.

Zatem $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$ i składowe przyśpieszenia wyrażają się związkami:

$$a_{Ax} = -\frac{V_o^2 \sin\alpha}{R\cos^2\alpha}\cos\varphi \ , \ a_{Ay} = -\frac{V_o^2 \sin\alpha}{R\cos^2\alpha}\sin\varphi \ , \ a_{Az} = 0 .$$

2. Określenie prędkości kątowej stożka

Rozpatrując ruch punktu A jako ruch punktu bryły sztywnej będącej w ruchu kulistym określimy wektor prędkości kątowej bryły.



rys. 1. C

Stożek porusza się bez poślizgu, co oznacza, że prędkości chwilowe punktów styku stożka z podłożem są równe zeru. Tym samym punkty te, (tworząca OB) stanowią chwilową oś obrotu. Znamy więc kierunek wektora prędkości kątowej (pokrywa się on z kierunkiem chwilowej osi obrotu). Wykorzystując twierdzenie o prędkościach w ruchu kulistym wygodnie jest korzystać z ruchomego układu współrzędnych *XYZ* (rysunek 1.C).

Prędkość punktu A można przedstawić jako

$$\overline{V}_A = \overline{\omega} \times \overline{r}_A .$$

W ruchomym układzie współrzędnych *XYZ* składowe poszczególnych wektorów są następujące:

$$V_{AX} = 0 \quad , \quad V_{AY} = V_o \quad , \quad V_{AZ} = 0 \; ,$$
$$\omega_X = -\omega \cos\alpha \quad , \quad \omega_Y = 0 \quad , \quad \omega_Z = \omega \sin\alpha \; ,$$
$$r_{AX} = R ctg\alpha \quad , \quad r_{AY} = 0 \quad , \quad r_{AZ} = 0 \; .$$

Korzystając z definicji iloczynu wektorowego otrzymujemy, że

$$\overline{V}_A = \begin{vmatrix} \overline{I} & \overline{J} & \overline{K} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ r_{AX} & r_{AY} & r_{AZ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{I} & \overline{J} & \overline{K} \\ -\omega\cos\alpha & 0 & \omega\sin\alpha \\ Rctg\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\omega \sin\alpha R ctg\alpha)\overline{J} \; .$$

Ponieważ jednocześnie $\overline{V}_A = V_o \overline{J}$, to możemy obliczyć, że $\omega = \dfrac{V_o}{R\cos\alpha}$. Rezultat ten możemy otrzymać również z analizy ruchu obrotowego wokół chwilowej osi obrotu. Wyrażenie $R\cos\alpha$ jest tutaj odległością punktu A od tej osi .

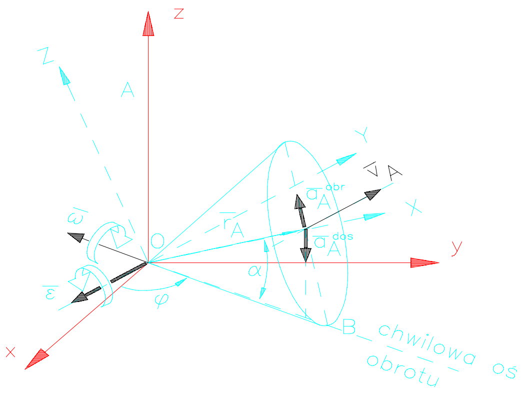
W układzie nieruchomym składowe wektora prędkości kątowej są następujące:

$$\omega_x = -\omega\cos\varphi = -\frac{V_o}{R\cos\alpha}\cos\varphi \; ,$$
$$\omega_y = -\omega\sin\varphi = -\frac{V_o}{R\cos\alpha}\sin\varphi \; , \qquad \omega_z = 0 .$$

3. Określenie przyśpieszenia kątowego bryły

Wektor przyśpieszenia kątowego jest zdefiniowany jako pochodna względem czasu wektora prędkości kątowej. Ponieważ długość wektora prędkości jest stała, więc jego pochodna ma kierunek do niego prostopadły. Jednocześnie wektor prędkości kątowej stale znajduje się na płaszczyźnie *xy*, co oznacza, że jego pochodna również musi znajdować się na tej płaszczyźnie. Tym samym kierunek wektora przyśpieszenia kątowego pokrywa się z kierunkiem osi Y układu ruchomego, czyli

$$\varepsilon_X = 0 \quad , \; \varepsilon_Y = -\varepsilon \;\; , \; \varepsilon_Z = 0 \quad .$$



rys. 1. D

Wykorzystując twierdzenie o przedstawieniu przyśpieszeń w ruchu kulistym mamy (rysunek 1.D):

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{dos} + \overline{a}_A^{obr} = \overline{\omega} \times \overline{V}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{r}_A \ .$$

W ruchomym układzie współrzędnych składowe wektorów wyznaczonych wcześniej w punkcie 1 i 2 są następujące:

$$V_{AX} = 0 \ , \ V_{AY} = V_o \ , \ V_{AZ} = 0 \ ,$$

$$\omega_X = -\frac{V_o}{R} \ , \ \omega_Y = 0 \ , \ \omega_Z = \frac{V_o}{R} tg\alpha \ .$$

Korzystając z macierzowego przedstawienia iloczynu wektorowego otrzymujemy

$$\overline{a}_A^{obr} = \begin{vmatrix} \overline{I} & \overline{J} & \overline{K} \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ Rctg\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\varepsilon R ctg\alpha)\overline{K} \ ,$$

$$\overline{a}_A^{dos} = \begin{vmatrix} \overline{I} & \overline{J} & \overline{K} \\ -\frac{V_o}{R} & 0 & \frac{V_o}{R} tg\alpha \\ 0 & V_o & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{V_o^2}{R} tg\alpha \right) \overline{I} + \left(-\frac{V_o^2}{R} \right) \overline{K}$$

Otrzymane przyśpieszenie punktu A w ruchu kulistym bryły porównamy z wyznaczonym wcześniej (w punkcie 1) przyśpieszeniem tego punktu w ruchu po okręgu, którego składowe w ruchomym układzie współrzędnych wynoszą:

$$a_{AX} = a_A^n \cos\alpha = -\frac{V_o^2}{R} tg\alpha \ ,$$

$$a_{AY} = a_A^n \cos 90^{\circ} = 0 \ ,$$

$$a_{AZ} = a_A^n \sin\alpha = \frac{V_o^2}{R} tg^2\alpha \ .$$

Uzyskamy jedno równanie tożsamościowe: $\left(-\frac{V_o^2}{R} tg\alpha \right) \overline{I} = \left(-\frac{V_o^2}{R} tg\alpha \right) \overline{I}$ i równanie

pozwalające określić przyśpieszenie kątowe ε

$$\left(\frac{V_o^2}{R} tg^2\alpha \right) \overline{K} = \left(\varepsilon R ctg\alpha - \frac{V_o^2}{R} \right) \overline{K} \ .$$

Stąd $\varepsilon = \dfrac{V_o^2 \sin\alpha}{R^2 \cos^3\alpha}$.

W układzie nieruchomym składowe wektora przyśpieszenia kątowego są następujące:

$$\varepsilon_x = \frac{V_o^2 \sin\alpha}{R^2 \cos^3\alpha} \sin\varphi \ , \ \varepsilon_y = -\frac{V_o^2 \sin\alpha}{R^2 \cos^3\alpha} \cos\varphi \ , \ \varepsilon_z = 0 .$$

4. Określenie prędkości i przyśpieszenia punktu M

Znając przyśpieszenie i prędkość kątową bryły możemy obliczyć prędkość punktu M jako:

$$\overline{V}_M = \begin{vmatrix} \overline{I} & \overline{J} & \overline{K} \\ -\frac{V_o}{R} & 0 & \frac{V_0}{R} tg\alpha \\ Rctg\alpha & 0 & R \end{vmatrix} = \left(\frac{V_0}{R} tg\alpha \, R \, ctg\alpha + \frac{V_o}{R} R \right) \cdot \overline{J} = 2V_0 \overline{J} .$$

Stąd składowe wektora prędkości punktu M wynoszą :

- w układzie ruchomym

$$V_{MX} = 0 \ , \ V_{MY} = 2V_0 \ , \ V_{MZ} = 0 ,$$

- w układzie nieruchomym

$$V_{Mx} = -2V_o \sin\varphi \ , \ V_{My} = 2V_o \cos\varphi \ , \ V_{Mz} = 0 .$$

Długość wektora prędkości punktu M wynosi $2V_O$.

Obliczenie przyśpieszenia przebiega analogicznie:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_M^{dos} + \overline{a}_M^{obr} .$$

Składową doosiową przyśpieszenia obliczamy jako:

$$\overline{a}_M^{dos} = \overline{\omega} \times \overline{V}_M = \begin{vmatrix} \overline{I} & \overline{J} & \overline{K} \\ -\frac{V_o}{R} & 0 & \frac{V_o}{R} tg\alpha \\ 0 & 2V_o & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{2V_o^2}{R} tg\alpha \right) \overline{I} + \left(-\frac{2V_o^2}{R} \right) \overline{K}$$

i obrotową jako

$$\overline{a}_M^{obr} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}_M = \begin{vmatrix} \overline{I} & \overline{J} & \overline{K} \\ 0 & -\frac{V_o^2 \sin\alpha}{R^2 \cos^3\alpha} & 0 \\ Rctg\alpha & 0 & R \end{vmatrix} = .$$

$$= \left(-\frac{V_o^2 tg\alpha}{R \cos^2\alpha} \right) \overline{I} + \left(\frac{V_o^2}{R \cos^2\alpha} \right) \overline{K} .$$

Składowe wektora przyśpieszenia punktu M w układzie ruchomym wynoszą zatem

$$a_{MX} = -\frac{2V_o^2}{R} tg\alpha - \frac{V_o^2 tg\alpha}{R \cos^2 \alpha} = -\frac{V_o^2}{R} tg\alpha \left(2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right),$$

$$a_{MY} = 0,$$

$$a_{MZ} = -\frac{2V_o^2}{R} + \frac{V_o^2}{R \cos^2 \alpha} = -\frac{V_o^2}{R} \left(2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right).$$

a długość wektora przyśpieszenia

$$\left| \overline{a}_M \right| = \frac{V_o^2}{R \cos^2 \alpha} \sqrt{1 + 4 \sin^2 \alpha + tg^2 \alpha} \; .$$