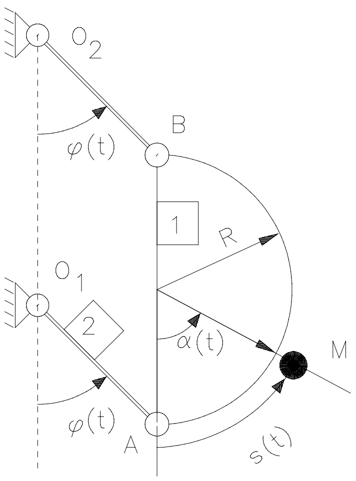
Przykład 2.3. Wyznaczanie prędkości i przyśpieszenia w ruchu złożonym

Punkt materialny M porusza się wzdłuż krawędzi tarczy 1 (rysunek 3.A). Znając równanie kąta obrotu pręta 2 i równanie drogi punktu M względem tarczy 1 wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie bezwzględne punktu M.



rys. 3. A

Do obliczeń przyjąć dane :

$O_1A = O_2B = 20[cm]$

$R = 16[cm]$

$\varphi(t) = \dfrac{5\pi t^3}{48}\ [rad]$

$s(t) = \left|\overline{AM}\right| = \pi t^2\ [cm]$

$t = 2[s]$

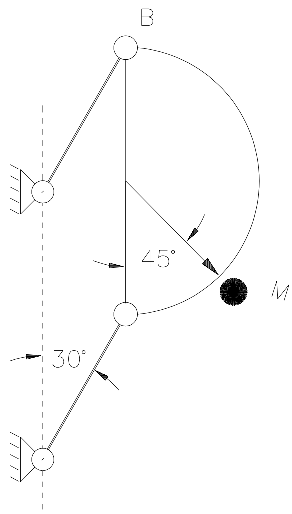
ROZWIĄZANIE

W rozwiązaniu założymy, że ruch tarczy 1 stanowi dla punktu M ruch unoszenia. Znajdziemy położenie tarczy 1 i punktu M w zadanej chwili czasu. Położenie tarczy 1 określa kąt $\varphi(t)$ (rys.3.A)

$$\varphi(t) = \frac{5\pi}{48} 2^3 = \frac{5}{6}\pi .$$

Położenie punktu M na tarczy 1 określimy kątem α: $\alpha = \dfrac{s}{R}$, który w chwili t = 2 s osiąga wartość $\alpha = \dfrac{\pi 2^2}{16} = \dfrac{\pi}{4}$.

Położenie tarczy 1 i punktu M w zadanej chwili czasu przedstawia rysunek 3.B.



rys. 3. B

Bezwzględną prędkość punktu M znajdziemy jako sumę wektorową prędkości unoszenia i prędkości względnej:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_M^u + \overline{V}_M^w$$

Miara rzutu wektora prędkości punktu M na oś styczną do trajektorii ruchu względnego wynosi: $V_M^w = \frac{ds}{dt} = 2\pi t$ i w chwili t = 2 s równa jest $V_M^w = 4\pi \left[\frac{cm}{s}\right]$.

Dodatni znak V_M^w wskazuje, że ruch punktu M odbywa się w kierunku wzrostu współrzędnej s. Wektor prędkości względnej przedstawiony jest na rysunku 3.C.

Określimy teraz prędkość unoszenia V_M^u punktu M.

Zauważmy, że prędkości punktów A i B należących do tarczy 1 są zawsze równoległe. Zatem tarcza 1 porusza się ruchem postępowym i stąd

$$\overline{V}_M^u = \overline{V}_A .$$

Ponieważ $\overline{V}_A = \overline{O_1 A} \times \overline{\omega}_2$, gdzie $\overline{\omega}_2$ oznacza prędkość kątową pręta 2, zatem

$$V_M^u = \left|\overline{O_1 A}\right| \cdot \omega_2 \ , \quad \text{gdyż} \ \ \overline{\omega}_2 \perp \overline{O_1 A} .$$

Prędkość kątowa ω_2 obliczona jako $\omega_2 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{5}{16}\pi t^2$,

osiąga w chwili t = 2 s wartość $\omega_2 = \frac{5}{4}\pi \left[\frac{1}{s}\right]$.

Dodatni znak ω_2 oznacza, że ruch pręta 2 odbywa się w kierunku wzrostu kąta obrotu φ.

Moduł wektora prędkości unoszenia wynosi więc:

$$V_M^u = V_A = 20 \cdot \frac{5}{4}\pi = 25\pi = 78.5 \ \left[cm/s\right]$$

Wektor $\overline{V}_M^u$ (zaznaczony na rysunku 3.C) skierowany jest prostopadle do osi pręta 2 w kierunku wzrostu kąta φ.

Wektor prędkości bezwzględnej określimy obliczając jego składowe w prostokątnym układzie współrzędnych *Oxyz*:

$$V_{Mx} = V_M^w \cos 45° - V_M^u \cos 30°$$

$$V_{My} = V_M^w \cos 45° + V_M^u \cos 60°$$

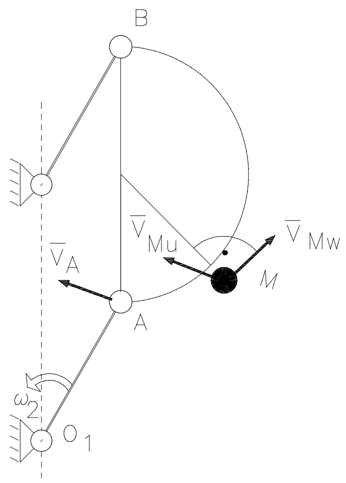
Ich wartości wynoszą:

$$V_{Mx} = -59.1 \left[cm/s \right],$$

$$V_{My} = 48.2 \left[cm/s \right] .$$

Ostatecznie długość wektora prędkości punktu M wynosi

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 76.3 [cm/s].$$



rys. 3. C

Przyśpieszenie bezwzględne punktu, w przypadku postępowego ruchu unoszenia, jest równe sumie geometrycznej przyśpieszenia względnego i unoszenia:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_M^w + \overline{a}_M^u , \quad \text{gdyż} \quad \overline{a}_M^{Cor} = 0 .$$

Przyśpieszenie względne przedstawimy jako sumę składowej normalnej i stycznej :

$$\overline{a}_M^w = \overline{a}_M^{wn} + \overline{a}_M^{w\tau} .$$

Wartość przyśpieszenia stycznego $\overline{a}_M^{w\tau}$ wynosi: $a_M^{w\tau} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$, co daje

$$a_M^{w\tau} = 2\pi = 6.28 \left[cm/s^2 \right].$$

Dodatnia wartość $a_M^{w\tau}$ oznacza, że wektor $\overline{a}_M^{w\tau}$ ma zwrot zgodny z wektorem prędkości $\overline{V}_M^w$.

Przyśpieszenie normalne $\overline{a}_M^{wn}$ ma wartość: $a_M^{wn} = \dfrac{(V_M^w)^2}{R} = \dfrac{16\pi^2}{16} = \pi^2 = 9.87 \left[cm/s^2 \right].$

Wektor $\overline{a}_M^{wn}$ skierowany jest wzdłuż promienia, w kierunku środka krzywizny toru ruchu względnego punktu M.

Przyśpieszenie unoszenia punktu M wynika z ruchu postępowego tarczy 1. Zachodzi zatem:

$$\overline{a}_M^u = \overline{a}_A$$

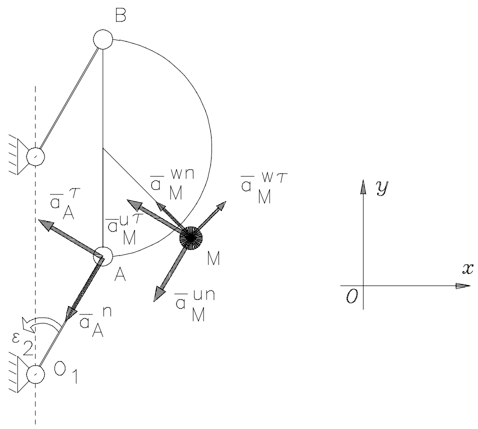
Punkt A uczestniczy w ruchu obrotowym pręta 2 wokół bieguna O_1. Zatem jego przyśpieszenie można przedstawić jako:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n ,$$

Ponieważ wektor przyśpieszenia kątowego pręta 2 - $\overline{\varepsilon}_2$ jest prostopadły do osi pręta to

$$a_A^\tau = \left|\overline{O_1 A}\right| \cdot \varepsilon_2 \quad \text{i} \qquad a_A^n = \left|\overline{O_1 A}\right| \cdot \omega_2^2 . \ .$$

Wektory $\overline{a}_M^{wn}$, $\overline{a}_M^{w\tau}$, $\overline{a}_M^{un}$, $\overline{a}_M^{u\tau}$ przedstawione są na rysunku 3.D.



rys. 3. D

Przyśpieszenie kątowe ε_2 wyznaczymy z zależności: $\varepsilon_2 = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$.

W rozpatrywanej chwili czasu t = 2s przyjmuje ono wartość:

$$\varepsilon_2 = \frac{5}{8}\pi t = 3.93\left[1/s^2\right].$$

Dodatnia wartość ε_2 wskazuje, że zwrot wektora przyśpieszenia jest zgodny ze zwrotem wektora prędkości kątowej ω_2.

Wartości a_A^τ , a_A^n i wynoszą :

$$a_A^\tau = a_M^{u\tau} = 20 \cdot 3.93 = 79 \left[cm/s^2\right],$$

$$a_A^n = a_M^{un} = 20 \cdot \frac{25}{16}\pi^2 = 308\left[cm/s^2\right] .$$

Wektor przyśpieszenia bezwzględnego punktu M określimy obliczając jego składowe w prostokątnym układzie współrzędnych *Oxyz* jako

$$a_{Mx} = \left(a_M^{w\tau} - a_M^{wn}\right) cos\,45° - a_M^{u\tau}\,cos\,30° - a_M^{un}\,cos\,60°\,,$$

$$a_{Mx} = \left(a_M^{w\tau} + a_M^{wn}\right) cos\,45° + a_M^{u\tau}\,cos\,60° - a_M^{un}\,cos\,30°\,.$$

Ich wartości wynoszą:

$$a_{Mx} = -225\left[cm / s^2\right],$$

$$a_{My} = -216\,\left[cm / s^2\right].$$

Ostatecznie długość wektora przyśpieszenia punktu M wynosi

$$a_M = \sqrt{\left(a_{Mx}\right)^2 + \left(a_{My}\right)^2} = 312\left[cm / s^2\right]\,.$$