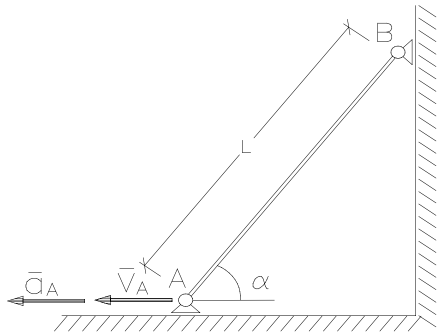
Przykład 3.1. Wyznaczanie prędkości i przyśpieszenia ruchu płaskim



rys. 1. A

Prędkość chwilowa i przyśpieszenie chwilowe punktu A pręta w położeniu przedstawionym na rysunku 1.A wynoszą:

$$\left|\overline{V}_A\right| = V_o \quad , \quad \left|\overline{a}_A\right| = a_o$$

Znaleźć prędkość i przyśpieszenie punktu B pręta w danej chwili.

ROZWIĄZANIE

1. Obliczenie prędkości

Obliczenie prędkości przeprowadzone zostanie trzema metodami:

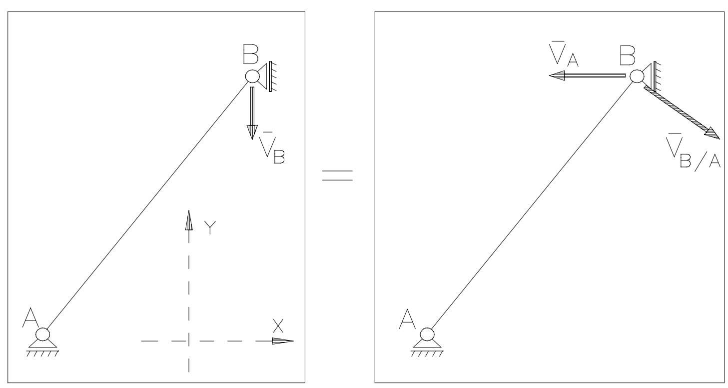
a) z wykorzystaniem twierdzenia o prędkościach w ruchu płaskim,
b) z wykorzystaniem planu chwilowych środków prędkości,
c) z wykorzystaniem twierdzenia o rzucie prędkości dwu punktów na łączącą je prostą.

Metoda a)

Chcemy przedstawić prędkość punktu B jako sumę prędkości tarczy w ruchu postępowym (równą prędkości dowolnie wybranego bieguna) i prędkości punktu B w ruchu tarczy wokół tego bieguna. Jako biegun najwygodniej wybrać punkt A, ponieważ jego prędkość jest znana (rys.1.B). Prędkość punktu B możemy zatem wyrazić następująco:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A} .$$

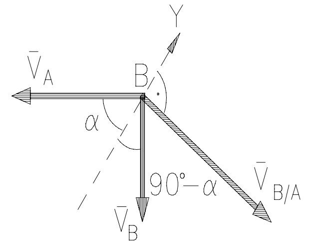
Graficzną ilustrację tej równości przedstawia rysunek 1.B.



rys1. B

Równanie to zawiera dwa wektory: $\overline{V}_B$, $\overline{V}_{B/A}$ o znanych kierunkach i nieznanych wartościach. Kierunek wektora prędkości punktu B wynika z warunków zadania (punkt B przesuwa się po pionowej ścianie). Rzutując to równanie wektorowe na dwie dowolne nierównoległe osie otrzymujemy układ dwu równań algebraicznych z niewiadomymi V_B , $V_{B/A}$. Rozwiązanie tego układu będzie najprostsze, gdy układ będzie rozprzęgnięty.

Osiągniemy to przez rzutowanie na osie prostopadłe do kierunków wektorów $\overline{V}_B$, $\overline{V}_{B/A}$. Rzutując na oś Y (rys. 1.C) prostopadłą do wektora $\overline{V}_{B/A}$ uzyskujemy :



rys. 1. C

$$-V_B \sin\alpha = -V_A \cos\alpha$$

i stąd

$$V_B = V_o ctg\alpha \,.$$

Dodatnia wartość V_B oznacza, że zwrot rzeczywisty wektora $\overline{V}_B$ jest zgodny z założonym na rysunku 1.B.

Otrzymane rozwiązanie - prędkość punktu B można przedstawić w postaci składowych w wybranym układzie współrzędnych.

W układzie nieruchomym *xy* (rys. 1.B) wynoszą one:

$$V_{Bx} = 0 \;,\; V_{By} = -V_o ctg\alpha \,.$$

Uwaga

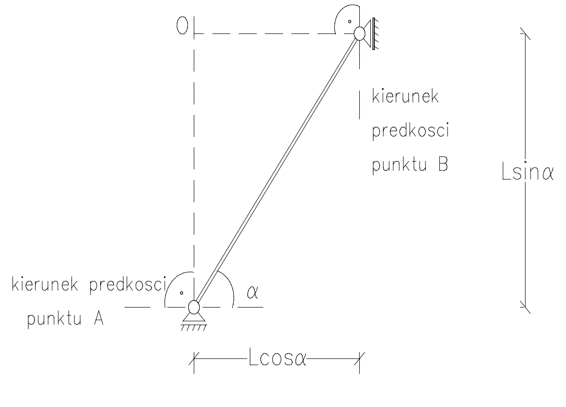
Dla określenia przyśpieszenia punktu B niezbędna jest znajomość prędkości kątowej tarczy. W tym celu należy określić wartość prędkości punktu B względem bieguna A - $V_{B/A}$. Rzutując równanie wektorowe $\overline{V}_B$ na oś x (rys 1.B) otrzymujemy:

$$0 = -V_A + V_{B/A}\sin\alpha \;, \quad \text{a stąd} \quad V_{B/A} = \frac{V_o}{\sin\alpha} \,.$$

Z definicji prędkości liniowej punktu w ruchu obrotowym tarczy wokół bieguna mamy $\overline{V}_{B/A} = \overline{\omega} \times \overline{r}_{AB} \;\Rightarrow\; V_{B/A} = \omega \cdot l$ i otrzymujemy ostatecznie: $\omega = \dfrac{V_{B/A}}{l} = \dfrac{V_o}{l \sin\alpha}$.

Metoda b)

Kierunki prędkości w punktach A i B są znane. Można zatem wyznaczyć chwilowy środek prędkości jako punkt przecięcia prostych prostopadłych do wektorów prędkości w punktach A i B (rysunek 1.D).



rys. 1. D

Prędkość chwilową punktu A można przedstawić równaniem

$$\overline{V}_A = \overline{\omega} \times \overline{r}_{OA} \quad \text{, skąd } V_A = \omega |OA| .$$

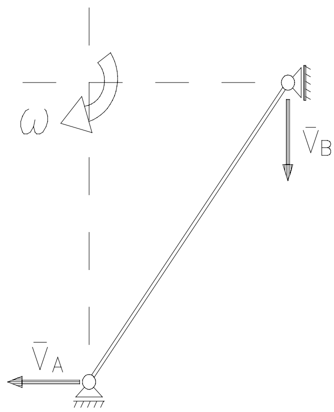
Umożliwia to nam określenie prędkości kątowej

$$\omega = \frac{V_A}{|OA|} = \frac{V_A}{l \sin\alpha} = \frac{V_o}{l \sin\alpha}$$

i następnie prędkości (długości wektora) punktu B

$$V_B = \omega |OB| = \frac{V_o}{l \sin\alpha} l \cos\alpha = V_o ctg\alpha$$

Zwrot i kierunek prędkości przedstawione są na rysunku 1.E.



rys. 1. E

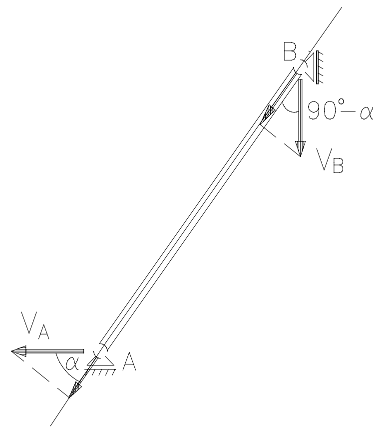
Metoda c)

Obliczenie prędkości punktu B można przeprowadzić wykorzystując twierdzenie o rzucie prędkości dwu punktów na łączącą je prostą. Jest to możliwe dzięki znajomości kierunków prędkości w punktach A i B oraz wartości prędkości w punkcie A. Rzutując wektory prędkości $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$ na kierunek pręta (rys. 1.F.)
otrzymujemy:

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$V_B = V_A \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$V_B = V_o ctg\alpha$$



rys. 1. F

W metodzie tej nie wyznacza się prędkości kątowej tarczy, tym samym uzyskane rozwiązanie jest niewystarczające w przypadku, gdy poszukujemy również przyśpieszeń.

2. Obliczenie przyśpieszenia

Wykorzystamy twierdzenie o przyśpieszeniach w ruchu płaskim, tzn. przedstawimy przyśpieszenie punktu B jako sumę:

- przyśpieszenia tarczy w ruchu postępowym, równego przyśpieszeniu dowolnie wybranego bieguna,
- przyśpieszenia punktu B w ruchu tarczy wokół tego bieguna.

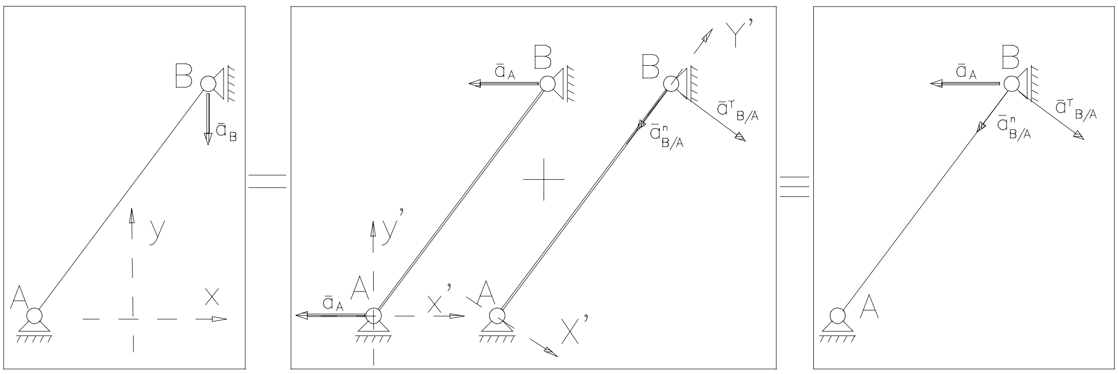
Podobnie jak przy obliczaniu prędkości, jako biegun wybieramy punkt A. Przyśpieszenie punktu B można wówczas zapisać jako:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{B/A} \ .$$

Przyśpieszenie punktu B względem punktu A (ruch obrotowy względem bieguna) - można rozłożyć na składowe: styczną i normalną :

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^n_{B/A} + \overline{a}^\tau_{B/A} \ . \qquad (*)$$

Ilustrację graficzną tego równania przedstawia rysunek 1.G.



rys. 1. G

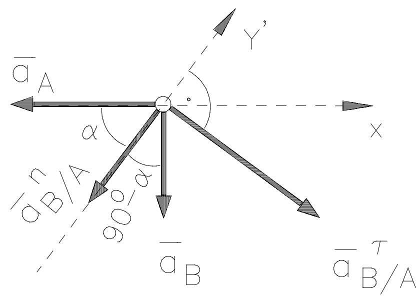
Wykorzystując obliczoną poprzednio wartość prędkości kątowej ω można obliczyć wartość przyśpieszenia normalnego punktu B względem A jako $\overline{a}^n_{B/A} = -\omega^2 \overline{r}_{AB}$, a stąd

$$a^n_{B/A} = \omega^2 \left| AB \right| = \left(\frac{V_o}{l \sin\alpha} \right)^2 l = \frac{V_o^2}{l \sin^2 \alpha} \ .$$

Ponieważ kierunek przyśpieszenia punktu B jest znany (podobnie jak przyśpieszenia stycznego punktu B względem A) możemy rozpatrywane równanie wektorowe (*) rozwiązać podobnie jak w części dotyczącej prędkości. Rzutując równanie na oś Y′ prostopadłą do wektora przyśpieszenia stycznego (rys. 1.H) otrzymujemy:

$$-a_B\,cos(90^\circ-\alpha)=-a_A\,cos\,\alpha-a^n_{B/A}$$

$$a_B=\frac{1}{sin\,\alpha}\left(a_o\,cos\,\alpha+\frac{V_o^2}{l\,sin^2\,\alpha}\right)$$



rys. 1. H

Uwaga

Aby obliczyć przyśpieszenie kątowe ε pręta należy określić przyśpieszenie styczne punktu B względem A. Można je uzyskać rzutując wektory w równaniu (*) na oś *x* (rys.1.H)

$$0=-a_A-a^n_{B/A}\,cos\,\alpha+a^\tau_{B/A}\,cos(90^\circ-\alpha)$$

skąd

$$a^\tau_{B/A}=\frac{1}{sin\,\alpha}\left(a_o+V_o^2\,\frac{cos\,\alpha}{l\,sin^2\,\alpha}\right).$$

Ponieważ z definicji przyśpieszenia stycznego punktu B względem A wynika, że

$$\bar{a}^\tau_{B/A}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_{AB}\quad \text{czyli}\quad a^\tau_{B/A}=\varepsilon|AB|,$$

zatem przyśpieszenie kątowe pręta wynosi:

$$\varepsilon=\frac{a^\tau_{B/A}}{|AB|}=\frac{1}{l\,sin\,\alpha}\left(a_o+V_o^2\,\frac{cos\,\alpha}{l\,sin^2\,\alpha}\right).$$