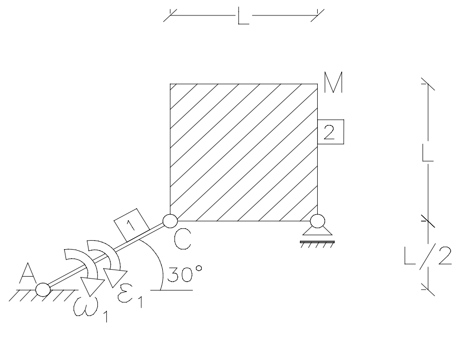
Przykład 3.2. Wyznaczanie prędkości i przyśpieszeń łańcucha kinematycznego



rys. 2. A

Prędkość i przyśpieszenie kątowe pręta 1 w położeniu przedstawionym na rysunku 2.A wynoszą odpowiednio $\omega_1 = -\omega_o$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_o$

Znaleźć prędkość i przyśpieszenie punktu M w danej chwili.

ROZWIĄZANIE

1. Obliczenie prędkości

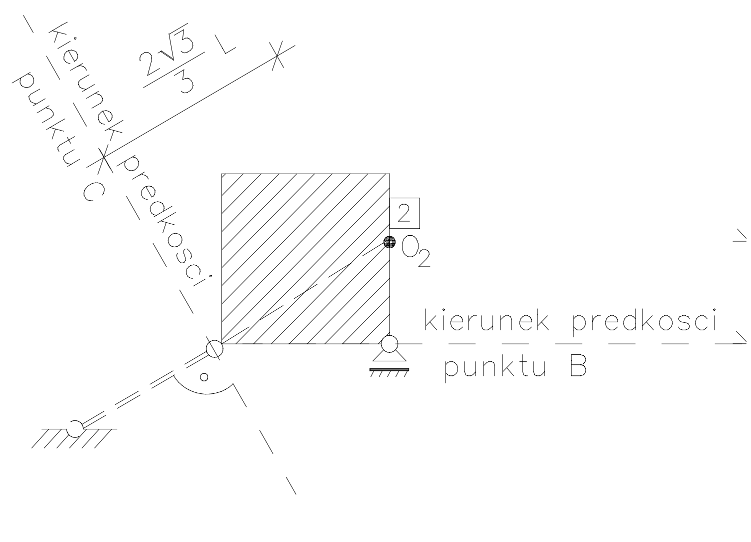
Obliczenie prędkości przeprowadzone zostanie z wykorzystaniem planu chwilowych środków prędkości.

1a) wyznaczenie chwilowych środków prędkości
<u>Tarcza 1</u>

Podparcie przegubowe nieprzesuwne w punkcie A wymusza ruch obrotowy pręta wokół tej podpory , zatem środek obrotu O_1 pokrywa się z punktem A.

<u>Tarcza 2</u>

Traktując przegub C jako punkt tarczy 1 możemy określić kierunek prędkości w tym punkcie. Jest on prostopadły do promienia $\bar{r}_{AC}$ czyli do osi pręta 1. Podparcie przegubowe przesuwne punktu B określa kierunek prędkości tego punktu; tym samym dla tarczy 2 znane są kierunki prędkości dwóch punktów. Pozwala to określić położenie chwilowego środka obrotu O_2 . Znajduje się on na przecięciu prostych prostopadłych do kierunków prędkości w punktach B i C (rys. 2.B.).



rys. 2. B

1b) określenie prędkości kątowych i liniowych

Tarcza 1

Prędkość liniową punktu C określa równanie: $\overline{V}_C = \overline{\omega}_1 \times \overline{r}_{AC}$. Długość wektora prędkości wynosi zatem $V_C = \omega_1 |AC| = \omega_o l$. Zwrot prędkości liniowej punktu C przedstawiony jest na rys. 2.C.

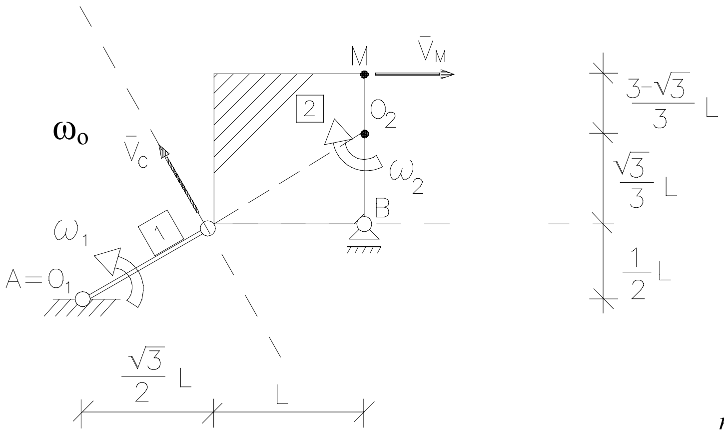
Tarcza 2

Znając prędkość liniową punktu C można określić prędkość kątową tarczy 2. Przedstawiając prędkość tego punktu w ruchu obrotowym wokół chwilowego środka obrotu O_2 mamy

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}_2 \times \overline{r}_{O_2 C}$$

i stąd możemy obliczyć wartość $\omega_2 = \dfrac{V_C}{|O_2 C|} = \dfrac{\omega_o l}{\frac{2\sqrt{3}}{3} l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_o$.

Zwrot wektora ω_2 przedstawiono symbolicznie na rys.2.C przez podanie kierunku obrotu. Wynika on ze zwrotu prędkości liniowej punktu C.



rys. 2. C

Znając wektor prędkości kątowej $\overline{\omega}_2$ tarczy 2 można znaleźć prędkość liniową dowolnego punktu tej tarczy. Szukana prędkość punktu M wynosi

$$\overline{V}_M = \overline{\omega}_2 \times \overline{r}_{O_2 M} ,$$

i stąd $V_M = \omega_2 |O_2 M| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_o \cdot \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} l = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\omega_o l$.

Kierunek i zwrot wektora prędkości przedstawiony jest na rysunku 2.C.

2. Obliczenie przyśpieszeń

Rozpatrując ruch tarczy 1 można określić przyśpieszenie punktu wspólnego obu tarcz - punktu C.

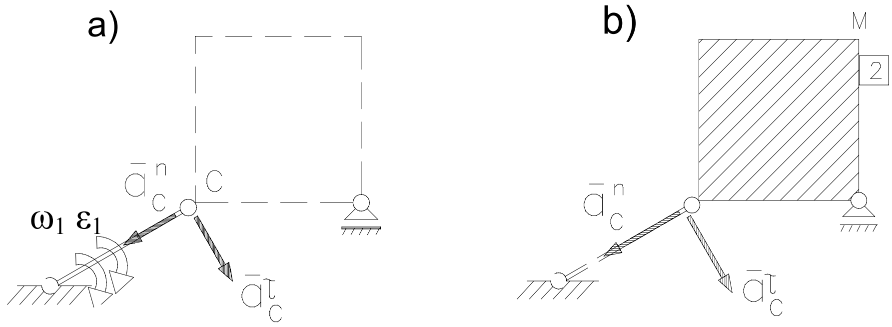
Tarcza 1

Tarcza porusza się ruchem obrotowym wokół stałego punktu A, zatem przyśpieszenie punktu C można przedstawić jako sumę wektorów przyśpieszeń: normalnego i stycznego

$$\overline{a}_C = \overline{a}_C^n + \overline{a}_C^\tau .$$

Wektory przyśpieszeń przedstawione są na rysunku 2.Da, a ich długości wynoszą odpowiednio:

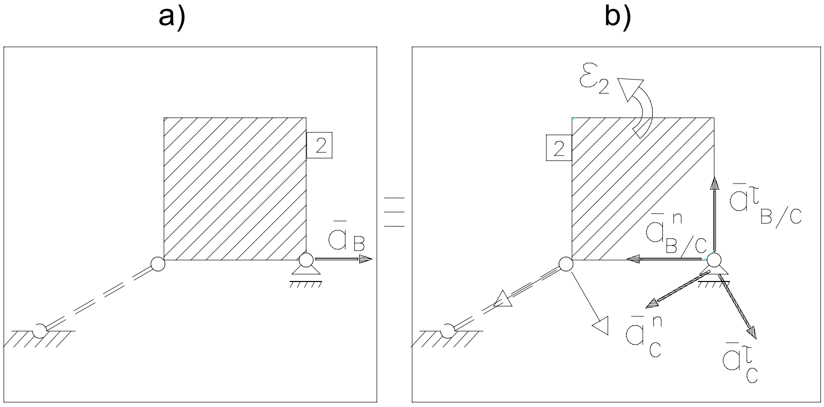
$$a_C^n = \omega_1^2 |AC| = \omega_o^2 l \quad \text{i} \qquad a_C^\tau = \varepsilon_1 |AC| = \varepsilon_o l \ .$$



rys. 2. D

Tarcza 2

Znane jest już przyśpieszenie punktu C tarczy 2 (rys.2.Db). Aby wyznaczyć przyśpieszenie punktu M w oparciu o twierdzenie o przyśpieszeniach w ruchu płaskim należy znać prędkość kątową i przyśpieszenie kątowe tarczy 2. Prędkość kątowa ω_2 została określona przy obliczaniu prędkości punktu M. Do określenia przyśpieszenia kątowego ε_2 wykorzystamy znajomość kierunku wektora przyśpieszenia podpory B. Punkt B porusza się ruchem prostoliniowym i kierunek wektora przyśpieszenia jest poziomy (rys. 2.Fa). Przedstawiając przyśpieszenie punktu B tarczy jako sumę przyśpieszenia punktu C wybranego jako biegun i przyśpieszenia w ruchu obrotowym wokół bieguna C (rys. 2.Fb) otrzymujemy równanie: $\overline{a}_B = \overline{a}_C + \overline{a}_{B/C}$,



rys. 2. F

a w postaci rozwiniętej

$$\overline{a}_B \quad = \quad \overline{a}_C^n + \overline{a}_C^\tau + \overline{a}_{B/C}^n + \overline{a}_{B/C}^\tau \ .$$

Aby znaleźć przyśpieszenie kątowe ε_2 należy określić wartość przyśpieszenia stycznego w ruchu obrotowym wokół bieguna C. Rzutując równanie na oś pionową otrzymujemy:

$$0 = -a_C^n \cos 60^{\circ} - a_C^{\tau} \cos 30^{\circ} + a_{B/C}^{\tau} \quad .$$

Po podstawieniu wartości przyśpieszeń uzyskujemy $\quad a_{B/C}^{\tau} = \omega_o^2 l \frac{1}{2} + \varepsilon_o l \frac{\sqrt{3}}{2}$,

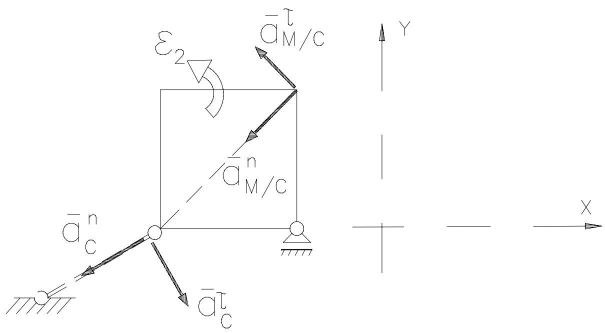
a stąd $\quad \varepsilon_2 = \frac{a_{B/C}^{\tau}}{|BC|} = \frac{1}{2}\omega_o^2 + \varepsilon_o \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Znając prędkość kątową ω_2 i przyśpieszenie kątowe ε_2 można określić przyśpieszenie dowolnego punktu tarczy 2.

Przyśpieszenie punktu M wynosi

$$\bar{a}_M = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^{\tau} + \bar{a}_{M/C}^n + \bar{a}_{M/C}^{\tau} \; .$$

Równanie to ilustruje rys. 2.G.



rys. 2.G

Wartości liczbowe wynoszą:

$$a_{M/C}^n = \omega_2^2 |MC| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_o\right)^2 \sqrt{2} l = 1.06\omega_o^2 l ,$$

$$a_{M/C}^{\tau} = \varepsilon_2 |MC| = \frac{1}{2}\omega_o^2 \sqrt{2} l + \varepsilon_o \frac{\sqrt{6}}{2} l = 0.71\omega_o^2 l + 1.22\varepsilon_o l \; .$$

Rzutując na osie układu *xy* (rys. 2.G) znajdujemy składowe szukanego przyśpieszenia

$$a_{Mx} = -a_C^n \cos 30^{\circ} + a_C^{\tau} \cos 60^{\circ} - a_{M/C}^n \cos 45^{\circ} - a_{M/C}^{\tau} \cos 45^{\circ} =$$
$$= -2.12\omega_o^2 l - 0.37\varepsilon_o l \; ,$$

$$a_{My} = -a_C^n \cos 60^{\circ} - a_C^{\tau} \cos 30^{\circ} - a_{M/C}^n \cos 45^{\circ} + a_{M/C}^{\tau} \cos 45^{\circ} =$$
$$= -0.75\omega_o^2 l \; .$$